JAN

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 183

Heft 3

Ausgegeben am 28. Mai 1941

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1941

Band 183. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Sz. Nagy, Gyula (Julius) v., Zur Theorie der Flächen vom Maximalindex	129
Arf, Cahit, Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2. (Teil I.) .	148
Stöhr, Alfred, Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie. I. Mittlere Ordnung.	168
Schmeidler, Werner, Über ein zweidimensionales Analogon einer Formel der Integralrechnung . .	175
Rédei, L. Über den Euklidischen Algorithmus in reellquadratischen Zahlkörpern	183

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Schriftleitung unter der Anschrift:
An die Schriftleitung des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Zur Theorie der Flächen vom Maximalindex.

Von *Gyula (Julius) v. Sz. Nagy* in Kolozsvár (Ungarn, früher in Szeged).

1. Einleitung.

Unter einer *Fläche* verstehen wir im folgenden eine aus endlich vielen Elementarflächen bestehende Fläche. Eine *Elementarfläche* ist ein eindeutiges stetiges Bild der Kugeloberfläche, das in jedem seiner Punkte eine mit dem Punkte sich stetig ändernde Berührungsebene hat und für das jede ebene Schnittkurve, sowie jede Schnittkurve seiner Berührungskegel aus Elementarkurven besteht. Eine *Elementarkurve* ist im Sinne von C. Juel ein reelles, eindeutiges, stetiges und mit stetiger Tangente versehenes Kreisbild in der reellen projektiven Ebene, welches aus endlich vielen Konvexbogen besteht. Gerade und isolierte Punkte gelten ebenfalls als Elementarkurven. Ist eine Strecke in einer Elementarkurve als Teilbogen enthalten, so gehört die Trägergerade dieser Strecke ganz zur Elementarkurve. Eine Elementarkurve kann keine Winkelpunkte besitzen.

Die *Ordnung* einer ebenen Schnittkurve K einer Fläche ist die höchste Anzahl reeller Punkte, in denen die Kurve von einer Geraden ihrer Ebene getroffen wird, wenn diese Punkte mit entsprechenden Vielfachheiten gerechnet werden. Besteht die Kurve K aus einer k-fachen Geraden g und aus einer Kurve K_1 (die nur solche Geraden enthalten kann, die von g abweichen), und bedeutet h die Anzahl der Treffpunkte von K_1 und g, so verstehen wir unter der Anzahl der Treffpunkte der Kurve K mit g die Summe $k + h$. Diese Zahl ist der Anzahl der Treffpunkte von K mit einer zu g genügend benachbarten Geraden g' gleich, wenn K_1 von g' ebenso oft getroffen wird wie von der Geraden g.

Die *Ordnung* einer Fläche F ist die höchste Anzahl ihrer ebenen Schnittkurven. Nach der vorigen Definition kann eine Fläche F eine endliche Ordnung auch dann haben, wenn sie Geraden enthält.

Der *Index* der Fläche F ist die geringste Anzahl (einfacher) reeller Punkte, in denen die Fläche von einer beliebigen Geraden des projektiven Raumes geschnitten wird.

Ein kleinster geschlossener Teil einer Fläche, der selbst eine Fläche im angegebenen Sinne ist, ist eine *Schale* oder ein *Mantel* der Fläche. Wir nehmen an, daß die Fläche *keine Ebene- oder Punktschale* besitzt.

Wir nennen eine mehrschalige Fläche *zerfallend* oder *reduzibel*, wenn ihre Schalen in zwei oder mehrere Systeme so gruppiert werden können, daß die Summe der Ordnungen der Flächen, die von den Schalen je eines Systems gebildet werden, der Ordnung der Fläche gleich ist. Hat die Fläche nur eine Schale oder zerfällt sie bei keiner Einteilung ihrer Schalen, so ist sie *einfach* oder *irreduzibel*.

Das *Geschlecht* p einer Fläche von n-ter Ordnung und vom Maximalindex (vom Index $n - 2$) wird durch die Gleichung

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$$

definiert, wo d die Anzahl der Doppelgeraden der Fläche (jede mehrfache Gerade mit entsprechender Multiplizität gerechnet) bedeutet.

In der Literatur haben C. Juel und der Verfasser allgemeine Untersuchungen über die Flächen vom Maximalindex veröffentlicht [1]). In dieser Arbeit werden diejenigen Resultate von mir über die Flächen vom Maximalindex zusammengefaßt und ergänzt, die bisher nur in ungarischer Sprache erschienen sind.

Es werden unter anderen die folgenden Sätze bewiesen:

Das Maximum des Geschlechtes p für eine Fläche n-ter Ordnung vom Maximalindex ist $n-2$. Ist $p > n-5$, so ist die Fläche irreduzibel, ist $p > n-2-3k$, so zerfällt die Fläche in höchstens k irreduzible Flächen.

Nennt man eine Fläche *gewöhnlich*, wenn sie keine Regelfläche und keine Kegelfläche ist, so gelten die Sätze:

Es gibt für jede Ordnung $n(\geqq 3)$ einschalige gewöhnliche Flächen vom Maximalindex und vom Geschlecht Eins.

Es gibt für jede gerade Ordnung n einschalige gewöhnliche Flächen vom Maximalindex und vom Geschlecht Null.

Es gibt für jede Ordnung $n(\geqq 3)$ gewöhnliche Flächen vom Maximalindex, die vom Geschlecht p $(1 \leqq p \leqq n-2)$ sind und aus p Schalen vom Geschlecht Eins bestehen.

Es gibt für $2 \leqq n \leqq 6$ gewöhnliche Flächen n-ter Ordnung vom Maximalindex, die aus $n-1$ Schalen bestehen.

Es gibt für jede Ordnung $n \geqq 2$ bzw. $n \geqq 3$ einschalige Flächen vom Maximalindex, die das Geschlecht $p = n-2$ bzw. $p = n-3$ haben. Ist $p \geqq 2$, so sind diese Flächen notwendigerweise gewöhnlich.

---

[1]) C. Juel, Über Flächen von Maximalindex, Det Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Math.-fys. Meddelelser (VI) **5** (1924), 1—40.

Gy. (Julius) v. Sz. Nagy, 1. Über Flächen vom Maximalindex, Math. Annalen **98** (1928), 657—683.

2. Über die Ovaloidschalen der Flächen vom Maximalindex, Acta scient. math. Szeged **7** (1935), 244—248.

3. Über die aus Regelflächen zweiter Ordnung bestehenden Flächen vom Maximalindex, Jahresbericht d. Deutsch. Math.-Vereinig. **47** (1937), 144—148.

4. Flächen vom Maximalindex (ungarisch), Anzeiger d. Sankt-Stefans Akademie **9** (1924), 117—132.

5. Untersuchungen über die Flächen vom Maximalindex (ungarisch), Math. u. Naturwiss. Anzeiger d. Ungar. Akademie der Wiss. **53** (1935), 420—474.

6. Über Flächen vom Maximalindex mit mindestens einer Regelflächenschale zweiter Ordnung (ungarisch), ebenda **56** (1937), 783—795.

7. Über das Geschlecht der einschaligen Flächen vom Maximalindex (ungarisch), ebenda **58** (1939), 298—312.

Ich werde in dieser Arbeit auch einige Resultate der folgenden Arbeiten von mir anwenden:

8. Über die reellen Züge algebraischer ebener und Raumkurven, Math. Annalen **77** (1916), 416—429.

9. Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex, Math. Annalen **89** (1923), 32—75; **90** (1924), 150—151.

10. Über die charakteristischen Zahlen einer Kurve vom Maximalklassenindex, Math. Annalen **100** (1928), 164—178.

11. Über die Züge der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex, Math. Annalen **100** (1928), 179—187.

12. Über die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex, Math. Zeitschrift **35** (1932), 80—92.

13. Über die Ungleichungen für die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex, Math. Zeitschrift **37** (1933), 493—513.

14. Über Raumkurven vom Maximalindex, Journal für d. reine u. angew. Mathematik **177** (1937), 197—214.

Diese Arbeiten werde ich im folgenden mit J. bzw. Sz. N. **1—14** zitieren.

Nach C. Juel [2]) gibt es zweischalige Flächen vierter Ordnung vom Maximalindex, deren Schalen Regelflächen dritter Ordnung sind. Die Doppelgerade beider Schalen hat zwei Grenzpunkte, von denen die Doppelgerade in zwei Strecken geteilt wird. C. Juel rechnet der betreffenden Regelfläche dritter Ordnung nur diejenige Strecke der Doppelgerade zu, die die eigentlichen Doppelpunkte enthält.

Nach meiner Definition der Flächen muß man die ganze Doppelgerade der Fläche zurechnen. In dieser Auffassung gibt es keine Fläche vierter Ordnung vom Maximalindex, die aus zwei Regelflächen dritter Ordnung bestcht. Es gibt aber Flächen sechster Ordnung vom Maximalindex, die von zwei Regelflächen dritter Ordnung gebildet werden.

Es gilt der allgemeine Satz:

Es gibt zweischalige Flächen vom Maximalindex, deren Schalen Regelflächen von n_1-ter bzw. n_2-ter Ordnung sind, wo $n_1(\geqq 2)$ und $n_2(\geqq 2)$ beliebige ganze Zahlen sind. Diese Flächen sind von $(n_1 + n_2)$-ter Ordnung und vom Geschlecht -1.

Es gibt aber keine Fläche vom Maximalindex, die aus drei oder mehr Regelflächen besteht.

2. Über die isolierten Strecken der Flächen vom Maximalindex.

Jede singuläre Linie einer Fläche vom Maximalindex ist eine Gerade [3]). Eine Fläche vom Maximalindex hat höchstens eine Rückkehrkante, die ebenfalls Gerade sein muß. Die Fläche kann aber diskrete konische, biplanare oder uniplanare Punkte haben. Auch eine reelle algebraische Fläche dritter Ordnung, die offenbar immer vom Maximalindex ist, kann diskrete konische Punkte haben [4]).

Eine Doppelgerade einer Fläche vom Maximalindex kann auch solche Punkte haben, die für die Fläche keine eigentlichen Doppelpunkte sind. Eine Ebene, die durch einen solchen Punkt P geht und die betreffende Doppelgerade nicht enthält, schneidet nämlich die Fläche in einer Kurve, die in P einen isolierten Doppelpunkt hat.

Beispiel: Für eine Regelfläche von dritter Ordnung, die von den gemeinsamen Sekanten einer Ellipse E und zweier windschiefer Geraden a und b gebildet wird, ist die Gerade a eine solche Doppelgerade, falls die Gerade a bzw. b die Ebene der Ellipse in einem Randpunkte bzw. in einem äußeren Punkte von E schneidet. Die Doppelgerade a wird von den durch b gehenden Berührungsebenen der Ellipse E in zwei Strecken geteilt. Die Punkte der einen bzw. anderen Strecke von a sind eigentliche bzw. isolierte Doppelpunkte der ebenen Schnittkurven der Regelfläche von dritter Ordnung.

Wir haben angenommen, daß die von uns betrachteten Flächen keine Strecke einer Geraden enthalten, ohne die ganze Gerade zu enthalten. Wir müssen also auch diejenige Strecke der Doppelgeraden a, in welcher die isolierten Doppelpunkte der ebenen Schnittkurven enthalten sind, der Fläche hinzurechnen. Wir wollen im folgenden diese Strecke eine *isolierte Strecke*, ihre Endpunkte *Grenzpunkte* nennen. C. Juel rechnet den Regelflächen vom Maximalindex die isolierten Strecken nicht zu [5]).

Man kann den folgenden Satz leicht einsehen:

I. *Eine Fläche vom Maximalindex hat höchstens eine Doppelgerade mit isolierten Strecken. Die Punkte einer isolierten Strecke fallen mit keinen anderen Punkten der Fläche zusammen.*

Wäre nämlich A bzw. B ein Punkt einer isolierten Strecke der Doppelgeraden a bzw. b auf einer Fläche vom Maximalindex, so hätte die Gerade AB in A und B insgesamt

---

[2]) J., 12—15.

[3]) J., 24; Sz. N. **1**, 658.

[4]) Vgl. z. B.: F. Klein, Elementarmathematik von höherem Standpunkte aus III (1928), 220.

[5]) J., 14.

vier Punkte mit der Fläche gemeinsam. Dann gäbe es in der Nähe der Geraden AB eine Gerade, die mit der Fläche mindestens vier Punkte weniger gemeinsam hat als die Gerade AB. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Gerade AB auf der Fläche liegt. Die Geraden, die den Punkt B mit den Punkten der isolierten Strecke von a verbinden, können aber der Fläche nicht angehören. Im entgegengesetzten Falle müßte nämlich auch die Ebene dieser Geraden der Fläche angehören. Nach unsrer Annahme hat aber die Fläche vom Maximalindex keine ebene Schale.

Würde nun der Punkt A einer isolierten Strecke der Fläche F vom Maximalindex mit einem gewöhnlichen Punkte B von F zusammenfallen, so hätte jede Tangente t, von der F in B berührt wird, in A und B insgesamt mindestens vier Punkte mit F gemeinsam. Dann gäbe es in der Nähe von t eine Gerade, die mit F mindestens vier Punkte weniger gemeinsam hat als t. Dann müßte aber jede dieser Tangenten t der Fläche F angehören. Dies ist aber unmöglich, weil F keine Ebene und keine Kegelschale hat. Die Fläche F vom Maximalindex mit einer isolierten Strecke kann nämlich keine Kegelschale haben.

Hätte nämlich F eine Kegelschale, so kann sie höchstens eine von Kegelflächen verschiedene Schale und zwar ein Ovaloid haben [6]). Es ist klar, daß eine Kegelfläche oder ein Ovaloid keine isolierte Strecke haben kann.

3. Das Geschlecht und der Rang der Flächen vom Maximalindex.

Eine ebene Schnittkurve einer Fläche F_n n-ter Ordnung vom Maximalindex wird dann *allgemein* genannt, wenn ihre Ebene die Fläche nicht berührt und keine Gerade der Fläche, keinen Punkt einer eventuellen isolierten Strecke und keinen diskreten (konischen, biplanaren oder uniplanaren) Doppelpunkt der Fläche enthält. Eine allgemeine ebene Schnittkurve K von F_n ist also von n-ter Ordnung und vom Maximalindex, sie hat ebenso viel Doppelpunkte bzw. Rückkehrpunkte, wie es Doppelgeraden bzw. Rückkehrkanten auf der Fläche F_n gibt. Mehrfache Geraden von F_n und mehrfache Punkte von K sind mit entsprechender Multiplizität zu rechnen.

Bedeutet δ bzw. r die Anzahl der Doppelgeraden bzw. der Rückkehrkanten von F_n und d ihre Summe, so ist

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta - r = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d \qquad (d = \delta + r)$$

das Geschlecht der Kurve K [7]). Durch diese Gleichung läßt sich auch das *Geschlecht* der Fläche $F_n^{(p)}$ definieren. $F_n^{(p)}$ wird im folgenden eine Fläche n-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlecht p bedeuten.

Der *Rang* R der Fläche $F_n^{(p)}$ ist die größte Klasse ihrer ebenen Schnittkurven. Diese Zahl ist auch die größte Ordnung ihrer Berührungskegel.

Eine allgemeine ebene Schnittkurve einer Fläche $F_n^{(p)}$ ist eine ebene Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex, die δ Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte hat, wenn $F_n^{(p)}$ δ Doppelgeraden und r Rückkehrkanten besitzt. Die Klasse m dieser Kurve genügt also der Ungleichung [8])

$$m \leqq n(n-1) - 2\delta - 3r.$$

Eine nicht allgemeine ebene Schnittkurve hat mindestens soviel Doppel- und Rückkehrpunkte wie eine allgemeine. Ihre Klasse genügt also erst recht der vorigen Ungleichung. Daraus folgt die Ungleichung

---

[6]) Sz. N. **1**, 662.

[7]) Sz. N. **9**, 69; **10**, 164—165.

[8]) Sz. N. **12** und **13**.

$$R \leqq n(n-1) - 2\delta - 3r.$$

Eine allgemeine ebene Schnittkurve einer Fläche $F_n^{(p)}$ hat [9])

$$w = n + 2p - 2$$

Wendepunkte. Das Geschlecht einer nicht allgemeinen ebenen Schnittkurve von $F_n^{(p)}$ ist nicht größer als das Geschlecht einer allgemeinen. Die Anzahl ihrer Wendepunkte ist also nicht größer als $n + 2p - 2$. Hieraus folgt der Satz:

II. *Hat eine Fläche von n-ter Ordnung, vom Maximalindex und vom Geschlecht p δ Doppelgeraden und r Rückkehrkanten, so genügt ihr Rang R der Ungleichung*

$$R \leqq n(n-1) - 2\delta - 3r.$$

Eine ebene Schnittkurve der Fläche hat höchstens $n + 2p - 2$ Wendetangenten.

Für den Beweis dieses Satzes müssen wir nur zeigen, daß es Flächen $F_n^{(p)}$ gibt, deren Rang gleich $n(n-1) - 2\delta - 3r$ ist. Dies folgt daraus, daß es ebene Kurven n-ter Klasse vom Maximalklassenindex mit δ Doppeltangenten und r Wendetangenten gibt, deren Ordnung $n(n-1) - 2\delta - 3r$ ist [10]). Bedeutet C die Duale einer solchen Kurve und projiziert man sie aus einem außerhalb ihrer Ebene liegenden Punkt, so erhält man eine Kegelfläche von n-ter Ordnung und vom Maximalindex, die δ Doppelgeraden und r Rückkehrkanten hat und vom Range $n(n-1) - 2\delta - 3r$ ist.

4. Über reduzible und irreduzible Flächen vom Maximalindex.

Wir nennen eine mehrschalige Fläche F *zerfallend* oder *reduzibel*, wenn ihre Schalen in zwei oder mehrere Systeme so gruppiert werden können, daß die Summe der Ordnungen der Flächen, die von den Schalen je eines Systems gebildet werden, der Ordnung der Fläche gleich ist. Die Fläche F von n-ter Ordnung zerfällt also in die Flächen $F_1, F_2, \ldots, F_k$ von n_1-, n_2-, $\ldots$, n_k-ter Ordnung dann, wenn die Flächen $F_1, F_2, \ldots, F_k$ zusammen jede Schale von F genau einmal enthalten, und sonst keine, und wenn $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ ist. Die Flächen $F_1, F_2, \ldots, F_k$ werden auch Faktorflächen von F genannt.

Hat die Fläche F nur eine Schale oder zerfällt sie bei keinerlei Einteilung ihrer Schalen, so ist sie *einfach* oder *irreduzibel* [11]).

Aus dem Begriff der Reduzibilität und Irreduzibilität folgt der Satz:

III. *Hat eine Fläche vom Maximalindex eine irreduzible ebene Schnittkurve, so ist auch die Fläche irreduzibel. Jede ebene Schnittkurve einer reduziblen Fläche vom Maximalindex ist reduzibel. Zerfällt eine ebene Schnittkurve einer Fläche vom Maximalindex in k irreduzible Kurven, so besteht die Fläche aus höchstens k irreduziblen Faktorflächen.*

Dieser Satz läßt sich auf Grund der folgenden Sätze leicht einsehen:

Eine Fläche F vom Maximalindex zerfällt dann und nur dann in k irreduzible Faktorflächen, wenn die Ordnung von F um $2k$ größer ist als die Summe der Indizes ihrer Schalen [12]). Analog lautet eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine ebene Kurve vom Maximalindex (die keinen geraden Zug enthält), in k irreduzible Kurven zerfällt [13]). Eine Schale einer Fläche vom Maximalindex hat denselben Index wie jede ebene Schnittkurve der Schale, die nicht aus lauter Geraden besteht.

IV. *Eine Fläche von n-ter Ordnung und vom Maximalindex hat höchstens das Geschlecht $n - 2$. Ist das Geschlecht p der Fläche größer als $n - 5$, so ist die Fläche sicher*

---

[9]) Sz. N. **10**.
[10]) Sz. N. **12**, 81.
[11]) Sz. N. **1**, 679.
[12]) Sz. N. **1**, 682.
[13]) Sz. N. **9**, 74.

irreduzibel. Besteht die Ungleichung $p > n - 2 - 3k$, *so hat die Fläche höchstens* k *irreduzible Faktorflächen.*

Dieser Satz gilt auch dann, wenn man darin das Wort *Fläche* überall durch das Wort *ebene Kurve* ersetzt. Wir beweisen den Satz erst für ebene Kurven.

Zerfällt die aus s Zügen von den Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_s$ bestehende ebene Kurve K von n-ter Ordnung, vom Maximalindex und vom Geschlecht p in k irreduzible Faktorkurven, so besteht die Gleichung [13a])

$$n = i_1 + i_2 + \cdots + i_s + 2k. \tag{1}$$

Besteht die Kurve K aus ν_1 Zügen vom Geschlecht Eins und aus $\nu_2 (= s - \nu_1)$ Zügen vom Geschlecht Null, so ist [14])

$$\nu_1 = p + k - 1. \tag{2}$$

Jeder Zug vom Geschlecht Eins hat mindestens den Index Eins, weil seine Ordnung größer als Zwei ist. Daraus folgt die Ungleichung

$$n \geqq \nu_1 + 2k. \tag{3}$$

Auf Grund der Relationen (1), (2) und (3) folgt also die Ungleichung

$$p = (\nu_1 + 2k) + 1 - 3k \leqq n + 1 - 3k.$$

Damit ist der Satz IV für ebene Kurven bewiesen. Daraus folgt er auch für Flächen, weil jede allgemeine ebene Schnittkurve einer in k irreduzible Faktorflächen zerfallenden Fläche von n-ter Ordnung, vom Maximalindex und vom Geschlecht p eine Kurve von n-ter Ordnung und vom Geschlecht p ist, die mindestens aus k irreduziblen Faktorkurven besteht.

V. *Das Geschlecht einer Fläche von* n*-ter Ordnung und vom Maximalindex ist nicht kleiner als* $-\left[\frac{n}{2}\right] + 1$, (wo die eckige Klammer die in $\frac{n}{2}$ enthaltene größte ganze Zahl bedeutet). *Erreicht das Geschlecht dieses Minimum, so zerfällt die Fläche in* $\left[\frac{n}{2}\right]$ *irreduzible Flächen, von denen jede Fläche — mit Ausnahme von höchstens einer Fläche von dritter Ordnung* (im Falle ungerader Ordnung n) *— von zweiter Ordnung ist. Eine Fläche von* n*-ter Ordnung vom Maximalindex kann in höchstens* $\left[\frac{n}{2}\right]$ *irreduzible Flächen zerfallen.*

Auch dieser Satz gilt ohne weiteres für ebene Kurven vom Maximalindex. Zerfällt nämlich die ebene Kurve K n-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlecht p in k irreduzible Kurven, deren Ordnungen bzw. Geschlechter $n_1, n_2, \ldots, n_k$ bzw. $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sind, so bestehen die Gleichungen

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \quad \text{und} \quad p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k - k + 1.$$

Bei gegebener Ordnung n ist also p dann am kleinsten, wenn die Summe $p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ am kleinsten und k am größten ist. Das Geschlecht einer irreduziblen ebenen Kurve vom Maximalindex ist nicht kleiner als Null. Der kleinste Wert von $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ist zwei. Ist aber n ungerade, so gibt es unten den Ordnungen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ auch eine ungerade, die mindestens drei ist. Im Falle gerader bzw. ungerader Ordnung besteht also die Ungleichung

$$n \geqq 2k \quad \text{bzw.} \quad n \geqq 2k + 1.$$

[13a]) Sz. N. **9**, 74.

[14]) Sz. N. **11**, 182.

Daraus folgt, daß

$$k \leqq \left[\frac{n}{2}\right] \quad \text{und} \quad p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k - k + 1 \geqq -k + 1 \geqq -\left[\frac{n}{2}\right] + 1 \quad \text{ist.}$$

Ist $n = 2k$ bzw. $n = 2k + 1$ und zerfällt die ebene Kurve K n-ter Ordnung vom Maximalindex in k Kurven zweiter Ordnung bzw. in $k - 1$ Kurven zweiter und in eine Kurve dritter Ordnung (vom Geschlecht Null), so hat man

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_k = 0 \quad \text{und} \quad p = -k + 1 = -\left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

Die Duale der ersten Kurve K wird durch k Ovale dargestellt, von denen keine zwei einander schneiden oder umschließen. Die Duale der zweiten Kurve K besteht aus $k - 1$ Ovalen von den vorigen Eigenschaften und aus einer Kurve von dritter Klasse und vom Geschlecht Null (die auch eine Kardioide sein kann). Die $k - 1$ Ovale liegen in demjenigen Gebiet der Ebene, aus dessen Punkten an die Kurve dritter Klasse drei Tangenten gehen [15]).

Projiziert man eine Kurve K $n = 2k$-ter bzw. $n = (2k + 1)$-ter Ordnung vom Maximalindex, die aus k Kurven zweiter Ordnung bzw. aus $k - 1$ Kurven zweiter und aus einer Kurve dritter Ordnung besteht, von einem außerhalb der Ebene von K liegenden Punkte aus, so erhält man eine Kegelfläche von n-ter Ordnung, vom Maximalindex und vom Geschlecht $-\left[\frac{n}{2}\right] + 1$, die in $\left[\frac{n}{2}\right]$ irreduzible Flächen zerfällt.

Hieraus ergibt sich wie oben der Satz V für Flächen.

5. Über die einschaligen Regelflächen vom Maximalindex.

Es gilt der Satz:

VI. *Jede einschalige Regelfläche vom Maximalindex ist vom Geschlecht Null.*

C. Juel hat gezeigt [16]), daß die einschaligen Regelflächen von n-ter Ordnung und vom Maximalindex zweierlei Arten haben. Sie haben entweder eine $(n - 2)$-fache und eine zweifache Leitgerade, unter denen die zweifache Leitgerade im Falle $n > 3$ eine isolierte Punktreihe enthält, oder sie haben eine $(n - 1)$-fache und eine einfache Leitgerade, von denen keine eine isolierte Strecke hat.

C. Juel rechnet die isolierte Strecke der zweifachen Leitgeraden der Fläche nicht zu. Aus den von C. Juel bewiesenen Eigenschaften der einschaligen Regelflächen vom Maximalindex folgt aber, daß diese Flächen auch dann den Maximalindex haben, wenn man die isolierten Strecken den Flächen zurechnet.

Für den Beweis des Satzes VI bemerken wir vorweg, daß eine allgemeine ebene Schnittkurve K einer einschaligen Regelfläche vom Maximalindex eine einzügige Kurve von n-ter Ordnung und vom Maximalindex ist. Wäre sie nämlich k-zügig ($k \geqq 2$), so wäre auch die Fläche k-schalig, weil die gemeinsamen Sekanten jedes Zuges und der Leitgeraden eine Regelfläche, also eine Schale der Fläche bestimmen.

Der Satz VI ist klar, falls die einschalige Regelfläche F_n von n-ter Ordnung und vom Maximalindex eine $(n - 1)$-fache und eine einfache Leitgerade hat. Dann ist eine allgemeine ebene Schnittkurve eine einzügige Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex mit einem $(n - 1)$-fachen Punkte, der also mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpunkten äquivalent

---

[15]) Sz. N. 9, 55—56.

[16]) J., 23—28.

ist. Diese Kurve hat keinen anderen Doppelpunkt, weil $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ die Maximalanzahl der Doppelpunkte einer einzügigen ebenen Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex ist. Diese Kurve und damit auch die Fläche F_n ist also vom Geschlecht Null.

Hat die einschalige Regelfläche F_n n-ter Ordnung vom Maximalindex eine $(n-2)$-fache Leitgerade g_1 und eine zweifache Leitgerade g_2, so bezeichnen wir mit K_n eine allgemeine ebene Schnittkurve von F_n und mit P_1 bzw. P_2 den Schnittpunkt der Ebene von K_n und der Geraden g_1 bzw. g_2.

Die Kurve K_n (von n-ter Ordnung und vom Maximalindex) hat im Punkte P_1 einen $(n-2)$-fachen und im Punkte P_2 einen zweifachen Punkt. Die Kurve K_n hat also die Eigenschaft, daß man aus P_1 bzw. P_2 an sie zwei bzw. keine solche Tangenten ziehen kann, von denen die Kurve außerhalb von P_1 bzw. P_2 berührt wird, wie dies von C. Juel bewiesen wurde [17]).

Eine Kurve K_n von diesen Eigenschaften hat nach einem anderen Satze von C. Juel [18]) außerhalb von P_1 und P_2 noch $n-3$ Doppelpunkte. Die Kurve K_n hat also insgesamt $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1 + (n-3) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpunkte. Die Kurve K_n und damit auch die Fläche F_n ist also vom Geschlecht Null.

Aus dem Beweise des Satzes VI folgt auch der Satz:

VII. *Jede einschalige Regelfläche n-ter Ordnung vom Maximalindex, die eine bzw. keine zweifache Leitgerade besitzt, hat $n-3$ bzw. keine Doppelerzeugenden.*

6. Konstruktion zweischaliger Regelflächen vom Maximalindex.

Es gilt der Satz:

VIII. *Zu beliebigen ganzen Zahlen $n_1(\geqq 2)$ und $n_2(\geqq 2)$ gibt es Flächen von (n_1+n_2)-ter Ordnung und vom Maximalindex, die von zwei Regelflächen n_1-ter bzw. n_2-ter Ordnung gebildet werden.*

Dieser Satz läßt sich durch den folgenden Satz beweisen [19]):

Zu beliebigen ganzen Zahlen $n_1(\geqq 2)$ und $n_2(\geqq 2)$ gibt es eine aus zwei Zügen C_1 und C_2 von n_1-ter bzw. n_2-ter Ordnung bestehende reduzible ebene Kurve C vom Maximalindex, die nicht nur bezüglich der Geraden ihrer Ebene, sondern auch bezüglich der durch zwei Fundamentalpunkte O_1 und O_2 hindurchgehenden Kegelschnitte der Ebene die Ordnung $n = n_1 + n_2$ und den Index $n-2$ hat. In dem einen Fundamentalpunkte hat die Kurve C_1 einen (n_1-1)-fachen, in dem anderen einen einfachen Punkt. In diesen Punkten hat die Kurve C_2 einen (n_2-1)-fachen und einen einfachen Punkt oder umgekehrt.

Es seien l_1 und l_2 zwei zueinander windschiefe Geraden durch den Punkt O_1 bzw. O_2. Die Leitlinien l_1, l_2 und C_1 bestimmen eine Regelfläche F_1 von n_1-ter Ordnung und vom Maximalindex.

Für den Beweis dieser Behauptung müssen wir nur zeigen, daß F_1 von einer beliebigen Geraden des Raumes entweder in n_1 oder in n_1-2 Punkten getroffen wird.

Es sei g eine beliebige Gerade, von der die Ebene ε der Kurve C_1 im Punkte P geschnitten wird und von der keine der Geraden l_1 und l_2 getroffen wird. Die gemeinsamen Sekanten der windschiefen Geraden l_1, l_2 und g bestimmen eine Regelfläche H von

---

[17]) J., 30—31.

[18]) C. Juel, Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter 7. Raekke, Naturv. og Math. Afd. (XI) **2** (1914), 136.

[19]) Sz. N. **14**, 204—205.

zweiter Ordnung, die von der Ebene ε in einem Kegelschnitt E geschnitten wird. E geht durch die Fundamentalpunkte O_1 und O_2 und trifft (nach dem angedeuteten Satze) die Kurve C_1 außer in den in das Punktpaar O_1O_2 fallenden n_1 Punkten noch entweder in n_1 oder in $n_1 - 2$ Punkten P_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Diejenige durch P_k gehende Gerade g_k, von der die Geraden l_1 und l_2 geschnitten werden, ist eine gemeinsame Erzeugende der Flächen F_1 und H. Die Gerade g wird von g_k in einem Punkte Q_k geschnitten, weil g eine zu l_1 und l_2 windschiefe Erzeugende von H ist. Der Punkt Q_k ist also ein gemeinsamer Punkt von g und F_1. Da es entweder n_1 oder $n_1 - 2$ Punkte P_k bzw. Geraden g_k gibt, wird F_1 von g entweder in n_1 oder in $n_1 - 2$ Punkten getroffen.

Die Fläche F_1 wird auch von jeder nicht auf ihr liegenden anderen Geraden des Raumes entweder in n_1 oder in $n_1 - 2$ Punkten getroffen.

Liegt nämlich die Gerade g in der Ebene ε, so wird die Kurve C_1 von n_1-ter Ordnung und vom Maximalindex von g entweder in n_1 oder in $n_1 - 2$ Punkten getroffen.

Wir nehmen nun an, daß die Gerade g die Leitgerade l_1 in einem Punkte Q schneidet.

Geht l_1 durch den $(n_1 - 1)$-fachen Punkt O_1 von C_1, so ist sie die $(n_1 - 1)$-fache Leitgerade von F_1. Die Gerade g trifft also die Fläche in n_1 Punkten, von denen $n_1 - 1$ immer in Q fallen. Geht l_1 durch den einfachen Punkt O_2 von C_1, so ist sie die einfache Leitgerade von F_1. Dann trifft die Ebene der Geraden l_1 und g die $(n_1 - 1)$-fache Leitgerade l_2 von F_1 in einem Punkte P, die Kurve C_1 außerhalb von O_2 entweder in $n_1 - 1$ oder in $n_1 - 3$ Punkten P_k. Jede Gerade PP_k ist eine Erzeugende von F_1, weil sie alle ihre Leitlinien C_1, l_1 und l_2 schneidet. Der Schnittpunkt der Geraden g und PP_k ist also ein gemeinsamer Punkt von g und F_1. Die Gerade g trifft also F (inbegriffen auch den Punkt Q) entweder in n_1 oder in $n_1 - 2$ Punkten.

Wir haben also bewiesen, daß F_1 die Ordnung n_1 und den Index $n_1 - 2$ hat.

Ebenso sieht man ein, daß die Leitlinien C_2, l_1 und l_2 eine Regelfläche F_2 von n_2-ter Ordnung und vom Maximalindex bestimmen und daß die aus F_1 und F_2 bestehende Fläche F die Ordnung $n = n_1 + n_2$ und den Index $n - 2$ hat.

Die letzte Behauptung folgt daraus, daß die Geraden l_1 und l_2 und eine zu l_1 und l_2 windschiefe Gerade g in der Ebene ε einen Kegelschnitt E bestimmen, der durch O_1 und O_2 geht und die aus C_1 und C_2 bestehende Kurve C außer in den in das Punktpaar O_1O_2 fallenden $n = n_1 + n_2$ Punkten noch entweder in n oder in $n - 2$ Punkten trifft. Damit ist der Satz VIII bewiesen.

7. Eigenschaften der mehrschaligen Regelflächen vom Maximalindex.

Es gilt der Satz:

IX. *Besteht eine Regelfläche vom Maximalindex aus* $k(\geqq 2)$ *Schalen, so hat sie das Geschlecht* $1 - k$ *und zerfällt in ihre* k *Schalen.*

Jede allgemeine ebene Schnittkurve einer aus k Schalen bestehenden Regelfläche F vom Maximalindex besteht aus k Zügen vom Geschlecht Null. Eine aus k Zügen vom Geschlecht Null bestehende ebene Kurve vom Maximalindex ist vom Geschlecht $1 - k$ [20]). Diese Kurve zerfällt in k irreduzible Kurven, in ihre k Züge, ihre Ordnung ist also der Summe der Ordnungen ihrer Züge gleich. Die Ordnung bzw. das Geschlecht einer Schale von F stimmt mit der Ordnung bzw. mit dem Geschlecht der allgemeinen ebenen Schnittkurven dieser Schale überein. Daraus folgt der Satz IX.

Aus dem Satze IX folgt der Satz:

---

[20]) Sz. N. **11**, 182 und 179.

ist. Diese Kurve hat keinen anderen Doppelpunkt, weil $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ die Maximalanzahl der Doppelpunkte einer einzügigen ebenen Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex ist. Diese Kurve und damit auch die Fläche F_n ist also vom Geschlecht Null.

Hat die einschalige Regelfläche F_n n-ter Ordnung vom Maximalindex eine $(n-2)$-fache Leitgerade g_1 und eine zweifache Leitgerade g_2, so bezeichnen wir mit K_n eine allgemeine ebene Schnittkurve von F_n und mit P_1 bzw. P_2 den Schnittpunkt der Ebene von K_n und der Geraden g_1 bzw. g_2.

Die Kurve K_n (von n-ter Ordnung und vom Maximalindex) hat im Punkte P_1 einen $(n-2)$-fachen und im Punkte P_2 einen zweifachen Punkt. Die Kurve K_n hat also die Eigenschaft, daß man aus P_1 bzw. P_2 an sie zwei bzw. keine solche Tangenten ziehen kann, von denen die Kurve außerhalb von P_1 bzw. P_2 berührt wird, wie dies von C. Juel bewiesen wurde [17]).

Eine Kurve K_n von diesen Eigenschaften hat nach einem anderen Satze von C. Juel [18]) außerhalb von P_1 und P_2 noch $n-3$ Doppelpunkte. Die Kurve K_n hat also insgesamt $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1 + (n-3) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpunkte. Die Kurve K_n und damit auch die Fläche F_n ist also vom Geschlecht Null.

Aus dem Beweise des Satzes VI folgt auch der Satz:

VII. *Jede einschalige Regelfläche n-ter Ordnung vom Maximalindex, die eine bzw. keine zweifache Leitgerade besitzt, hat $n-3$ bzw. keine Doppelerzeugenden.*

6. Konstruktion zweischaliger Regelflächen vom Maximalindex.

Es gilt der Satz:

VIII. *Zu beliebigen ganzen Zahlen $n_1(\geqq 2)$ und $n_2(\geqq 2)$ gibt es Flächen von (n_1+n_2)-ter Ordnung und vom Maximalindex, die von zwei Regelflächen n_1-ter bzw. n_2-ter Ordnung gebildet werden.*

Dieser Satz läßt sich durch den folgenden Satz beweisen [19]):

Zu beliebigen ganzen Zahlen $n_1(\geqq 2)$ und $n_2(\geqq 2)$ gibt es eine aus zwei Zügen C_1 und C_2 von n_1-ter bzw. n_2-ter Ordnung bestehende reduzible ebene Kurve C vom Maximalindex, die nicht nur bezüglich der Geraden ihrer Ebene, sondern auch bezüglich der durch zwei Fundamentalpunkte O_1 und O_2 hindurchgehenden Kegelschnitte der Ebene die Ordnung $n = n_1 + n_2$ und den Index $n-2$ hat. In dem einen Fundamentalpunkte hat die Kurve C_1 einen (n_1-1)-fachen, in dem anderen einen einfachen Punkt. In diesen Punkten hat die Kurve C_2 einen (n_2-1)-fachen und einen einfachen Punkt oder umgekehrt.

Es seien l_1 und l_2 zwei zueinander windschiefe Geraden durch den Punkt O_1 bzw. O_2. Die Leitlinien l_1, l_2 und C_1 bestimmen eine Regelfläche F_1 von n_1-ter Ordnung und vom Maximalindex.

Für den Beweis dieser Behauptung müssen wir nur zeigen, daß F_1 von einer beliebigen Geraden des Raumes entweder in n_1 oder in n_1-2 Punkten getroffen wird.

Es sei g eine beliebige Gerade, von der die Ebene ε der Kurve C_1 im Punkte P geschnitten wird und von der keine der Geraden l_1 und l_2 getroffen wird. Die gemeinsamen Sekanten der windschiefen Geraden l_1, l_2 und g bestimmen eine Regelfläche H von

---

[17]) J., 30—31.

[18]) C. Juel, Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter 7. Raekke, Naturv. og Math. Afd. (XI) **2** (1914), 136.

[19]) Sz. N. **14**, 204—205.

zweiter Ordnung, die von der Ebene ε in einem Kegelschnitt E geschnitten wird. E geht durch die Fundamentalpunkte O_1 und O_2 und trifft (nach dem angedeuteten Satze) die Kurve C_1 außer in den in das Punktpaar O_1O_2 fallenden n_1 Punkten noch entweder in n_1 oder in $n_1 - 2$ Punkten P_k ($k = 1, 2, \ldots$). Diejenige durch P_k gehende Gerade g_k, von der die Geraden l_1 und l_2 geschnitten werden, ist eine gemeinsame Erzeugende der Flächen F_1 und H. Die Gerade g wird von g_k in einem Punkte Q_k geschnitten, weil g eine zu l_1 und l_2 windschiefe Erzeugende von H ist. Der Punkt Q_k ist also ein gemeinsamer Punkt von g und F_1. Da es entweder n_1 oder $n_1 - 2$ Punkte P_k bzw. Geraden g_k gibt, wird F_1 von g entweder in n_1 oder in $n_1 - 2$ Punkten getroffen.

Die Fläche F_1 wird auch von jeder nicht auf ihr liegenden anderen Geraden des Raumes entweder in n_1 oder in $n_1 - 2$ Punkten getroffen.

Liegt nämlich die Gerade g in der Ebene ε, so wird die Kurve C_1 von n_1-ter Ordnung und vom Maximalindex von g entweder in n_1 oder in $n_1 - 2$ Punkten getroffen.

Wir nehmen nun an, daß die Gerade g die Leitgerade l_1 in einem Punkte Q schneidet.

Geht l_1 durch den $(n_1 - 1)$-fachen Punkt O_1 von C_1, so ist sie die $(n_1 - 1)$-fache Leitgerade von F_1. Die Gerade g trifft also die Fläche in n_1 Punkten, von denen $n_1 - 1$ immer in Q fallen. Geht l_1 durch den einfachen Punkt O_2 von C_1, so ist sie die einfache Leitgerade von F_1. Dann trifft die Ebene der Geraden l_1 und g die $(n_1 - 1)$-fache Leitgerade l_2 von F_1 in einem Punkte P, die Kurve C_1 außerhalb von O_2 entweder in $n_1 - 1$ oder in $n_1 - 3$ Punkten P_k. Jede Gerade PP_k ist eine Erzeugende von F_1, weil sie alle ihre Leitlinien C_1, l_1 und l_2 schneidet. Der Schnittpunkt der Geraden g und PP_k ist also ein gemeinsamer Punkt von g und F_1. Die Gerade g trifft also F (inbegriffen auch den Punkt Q) entweder in n_1 oder in $n_1 - 2$ Punkten.

Wir haben also bewiesen, daß F_1 die Ordnung n_1 und den Index $n_1 - 2$ hat.

Ebenso sieht man ein, daß die Leitlinien C_2, l_1 und l_2 eine Regelfläche F_2 von n_2-ter Ordnung und vom Maximalindex bestimmen und daß die aus F_1 und F_2 bestehende Fläche F die Ordnung $n = n_1 + n_2$ und den Index $n - 2$ hat.

Die letzte Behauptung folgt daraus, daß die Geraden l_1 und l_2 und eine zu l_1 und l_2 windschiefe Gerade g in der Ebene ε einen Kegelschnitt E bestimmen, der durch O_1 und O_2 geht und die aus C_1 und C_2 bestehende Kurve C außer in den in das Punktpaar O_1O_2 fallenden $n = n_1 + n_2$ Punkten noch entweder in n oder in $n - 2$ Punkten trifft. Damit ist der Satz VIII bewiesen.

7. Eigenschaften der mehrschaligen Regelflächen vom Maximalindex.

Es gilt der Satz:

IX. *Besteht eine Regelfläche vom Maximalindex aus* $k(\geqq 2)$ *Schalen, so hat sie das Geschlecht* $1 - k$ *und zerfällt in ihre* k *Schalen.*

Jede allgemeine ebene Schnittkurve einer aus k Schalen bestehenden Regelfläche F vom Maximalindex besteht aus k Zügen vom Geschlecht Null. Eine aus k Zügen vom Geschlecht Null bestehende ebene Kurve vom Maximalindex ist vom Geschlecht $1 - k$ [20]). Diese Kurve zerfällt in k irreduzible Kurven, in ihre k Züge, ihre Ordnung ist also der Summe der Ordnungen ihrer Züge gleich. Die Ordnung bzw. das Geschlecht einer Schale von F stimmt mit der Ordnung bzw. mit dem Geschlecht der allgemeinen ebenen Schnittkurven dieser Schale überein. Daraus folgt der Satz IX.

Aus dem Satze IX folgt der Satz:

---

[20]) Sz. N. **11**, 182 und 179.

X. *Je zwei Schalen einer mehrschaligen Regelfläche vom Maximalindex bilden eine reduzible Regelfläche vom Maximalindex.*

Dies folgt daraus, daß eine (nicht auf der Fläche liegende) Gerade höchstens *eine* irreduzible Faktorfläche einer reduziblen Fläche vom Maximalindex so oft treffen kann, wie der Index dieser Faktorfläche angibt. Im entgegengesetzten Falle wäre nämlich die Ordnung der reduziblen Fläche kleiner als die Summe der Ordnungen ihrer irreduziblen Faktorflächen.

Im vorigen Paragraphen haben wir eine zweischalige Regelfläche konstruiert, deren Schalen die Ordnungen n_1 bzw. n_2 haben, von denen mindestens die eine Ordnung größer als zwei ist. Beide Schalen haben zwei Leitgeraden, von denen eine einfach, die andere aber $(n_1 - 1)$-fach bzw. $(n_2 - 1)$-fach ist. Die Leitgeraden der einen Schale stimmen mit denjenigen der anderen überein.

Jede zweischalige Regelfläche hat dieselben Eigenschaften. Es gilt nämlich der Satz:

XI. *Besteht eine zweischalige Fläche F vom Maximalindex aus zwei Regelflächen F_1 und F_2 von den Ordnungen n_1 bzw. n_2 und ist mindestens eine der Ordnungen n_1 und n_2 größer als zwei, so hat die Fläche F_1 bzw. F_2 eine einfache und eine $(n_1 - 1)$-fache bzw. $(n_2 - 1)$-fache Leitgerade. Die Leitgeraden von F_1 fallen mit denjenigen von F_2 zusammen, und zwar fällt die einfache Leitgerade von F_1 entweder in die einfache oder in die mehrfache Leitgerade von F_2.*

Aus dem Satze IX oder X folgt, daß die Fläche F reduzibel ist und deshalb die Ordnung $n = n_1 + n_2$ hat. Wir nehmen an, daß $n_1 \geqq 3$ ist. Bedeutet g eine Erzeugende von F_1, die keine Erzeugende von F_2 ist, so beweisen wir, daß F_2 von g in n_2 Punkten getroffen wird.

Berührt nämlich g die Fläche F_2, so hat sie mit F_2 n_2 Punkte gemeinsam, weil F_2 eine Fläche von n_2-ter Ordnung und vom Maximalindex ist. Berührt aber g die Fläche F_2 nicht, so trifft sie F_2 so oft wie die genügend nahe an g liegenden Geraden des Raumes. Berührt nun eine durch g gehende Ebene die Fläche F_1 in einem Punkte P von g, so treffen die durch P gehenden (und nicht auf F_1 liegenden) Geraden dieser Ebene die Fläche F_1 in n_1 Punkten, weil sie Tangenten von F_1 sind. Es gibt also in einer genügend kleinen Umgebung von g eine Gerade g', von der die Fläche F_1 nur in $n_1 - 2$ Punkten getroffen wird. Diese Gerade g' trifft also F, F_1 bzw. F_2 in $n_1 + n_2 - 2$, $n_1 - 2$ bzw. n_2 Punkten. Die Gerade g hat also auch im zweiten Falle n_2 Punkte mit F_2 gemeinsam.

Die n_2 gemeinsamen Punkte der Fläche F_2 mit der Erzeugenden g von F_1 liegen auf n_2 Geraden, weil die Schalen einer Fläche vom Maximalindex einander in Geraden schneiden oder berühren. Unter diesen n_2 Geraden gibt es höchstens zwei voneinander verschiedene. Andernfalls wäre nämlich die Fläche F_1 — gegen unsre Annahme — von zweiter Ordnung, weil ihre Erzeugenden von drei verschiedenen Geraden geschnitten würden. Aus demselben Grunde fallen die n_2 Geraden mit den Leitgeraden von F_1 zusammen.

Nach dem angeführten Satze von C. Juel [16]) sind die einschaligen Regelflächen vom Maximalindex von zweierlei Art. Sie haben entweder eine einfache Leitgerade oder keine. Im letzten Falle hat die Regelfläche eine zweifache Leitgerade mit einer isolierten Strecke.

Daraus folgt, daß die Flächen F_1 und F_2 je eine einfache Leitgerade haben. Hätte nämlich F_1 eine isolierte Strecke, so würden die Punkte dieser isolierten Strecke auf die eine Leitgerade der Fläche F_2 fallen. Dies ist aber nach Satz I unmöglich.

Damit ist der Satz XI bewiesen.

8. Beweis des Satzes, daß es keine Fläche vom Maximalindex gibt, die von drei oder mehr Regelflächen gebildet wird.

Wir haben bewiesen, daß es keine Fläche vom Maximalindex gibt, die aus drei oder mehr Regelflächen zweiter Ordnung besteht [21]). Wir beweisen jetzt den folgenden allgemeinen Satz:

XII. *Es gibt keine Fläche vom Maximalindex, die aus drei oder mehr Regelflächenschalen besteht.*

Besteht die Fläche F von n-ter Ordnung und vom Maximalindex aus den Regelflächenschalen $F_1, F_2, \ldots, F_k$ von den Ordnungen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $(k > 2)$, so ist F nach Satz IX reduzibel und $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Die Schalen F_1, F_2 und F_3 bilden eine Fläche F_{123} von $n_{123} = (n_1 + n_2 + n_3)$-ter Ordnung vom Maximalindex. Sonst gäbe es nämlich Geraden, von denen die Fläche F n-ter Ordnung in höchstens

$$(n_1 + n_2 + n_3 - 4) + n_4 + n_5 + \cdots + n_k = n - 4$$

Punkten getroffen wird. Die Fläche F wäre dann aber nicht vom Maximalindex.

Für den Beweis des Satzes genügt es also zu zeigen, daß F_{123} nicht vom Maximalindex sein kann. Wir können annehmen, daß mindestens eine der Schalen von F_{123} eine Ordnung größer als 2 hat, weil der Satz XII für $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ von uns schon bewiesen wurde [21]).

Wir nehmen an, daß die Fläche F_{123} den Maximalindex hat. Wir bezeichnen mit F_{12}, F_{13} bzw. F_{23} die aus F_1 und F_2, aus F_1 und F_3 bzw. aus F_2 und F_3 bestehenden zweischaligen Flächen vom Maximalindex (Satz X). Die Ordnungen dieser Flächen sind $n_{12} = n_1 + n_2$, $n_{13} = n_1 + n_3$ bzw. $n_{23} = n_2 + n_3$.

Ist die Ordnung von F_1 größer als 2, so hat die Fläche F_1 zwei bestimmte Leitgeraden l_1 und l_2. Da F_{12} bzw. F_{13} eine Regelfläche vom Maximalindex ist, sind l_1 und l_2 auch Leitgeraden von F_2 und F_3.

Eine zu l_1 und l_2 windschiefe Gerade g trifft die Regelfläche F_i vom Maximalindex in n_i oder in $n_i - 2$ Punkten $(i = 1, 2, 3)$. Legen wir durch g, l_1 und l_2 die Regelfläche H zweiter Ordnung. Eine Ebene ε, die keine der Geraden g, l_1 und l_2 enthält, schneidet die Fläche F_i in einer Kurve C_i n_i-ter Ordnung vom Maximalindex, die Fläche H in einem Kegelschnitt E, die Gerade l_1 bzw. l_2 in einem Punkte O_1 bzw. O_2. Die Kurve C_i hat in dem einen Punkte des Paares $O_1 O_2$ einen $(n_i - 1)$-fachen, in dem anderen einen einfachen Punkt. Der Kegelschnitt E geht durch die Punkte O_1 und O_2 und trifft die Kurve C_i außer in den in das Punktpaar O_1O_2 fallenden n_i Punkten noch in n_i oder in $n_i - 2$ Punkten.

Ist nämlich Q_k ein gemeinsamer Punkt von F_i und g, so ist die gemeinsame Sekante g_k der Leitgeraden l_1 und l_2 durch Q_k eine gemeinsame Erzeugende von F_i und H. Der Schnittpunkt P_k von g_k mit der Ebene ε ist ein gemeinsamer Punkt von C_i und E.

Umgekehrt: Jedem außerhalb von O_1 und O_2 liegenden Schnittpunkte P_k von C_i und E entspricht ein Schnittpunkt Q_k von F_i und g. Die gemeinsame Sekante g_k von l_1 und l_2 durch P_k ist nämlich eine gemeinsame Erzeugende von F_i und H. Der Schnittpunkt von g und g_k ist also ein Schnittpunkt von g mit F_i.

Ebenso kann man einsehen, daß die Regelfläche F_{12} von der Geraden g in n_{12} oder in $n_{12} - 2$ Punkten getroffen wird, je nachdem die aus C_1 und C_2 bestehende Kurve C_{12} vom Kegelschnitt E in $2n_{12}$ oder in $2n_{12} - 2$ Punkten getroffen wird (inbegriffen das Punktpaar O_1O_2).

---

[21]) Sz. N. 3.

Ist l_1 die $(n_1 - 1)$-fache Leitgerade von F_1, so ist O_1 der $(n_1 - 1)$-fache Punkt von C_1. Wir können annehmen, daß keine Tangente des Punktes O_1 durch O_2 geht. Dies kann man durch eine geeignete Ebene ε immer erreichen. Andernfalls wäre jede Gerade, die je einen Punkt der Geraden l_1 und l_2 verbindet, eine Tangente der Fläche F_1. Die Fläche F_1 würde dann von jeder durch l_1 gehenden Ebene längs der ganzen Geraden l_1 berührt. Dies ist aber unmöglich.

Die $(n_1 - 1)$-fache Leitgerade l_1 von F_1 enthält keine Rückkehrkante. Im entgegengesetzten Falle hätte nämlich die Kurve C_1 vom Maximalindex in O_1 auch einen Rückkehrpunkt, dessen Tangente den Punkt O_2 nicht enthält. Es gäbe also in der Ebene ε solche Geraden g_1 bzw. g_2 durch O_2, von denen die Kurve C_1 in n_1 bzw. in $n_1 - 2$ Punkten getroffen wird. Der Schnittpunkt der Leitgerade l_1 mit einer Ebene $(g_1 l_2)$ bzw. $(g_2 l_2)$ wäre dann offenbar ein $(n_1 - 1)$-facher bzw. $(n_1 - 3)$-facher Punkt für die entsprechende ebene Schnittkurve der Fläche F_1. Die Leitlinie l_1 würde also auch eine isolierte Strecke enthalten, die nach Satz XI auch auf der Fläche F_2 liegen müßte. Dies ist aber nach Satz I unmöglich, weil F_1 und F_2 eine Fläche F_{12} vom Maximalindex bilden.

Die Kurve C_1 hat keinen Rückkehrpunkt. Dasselbe gilt auch für die Kurve C_2. Die Kurven C_1 und C_2 sind vom Geschlecht Null

Wir bezeichnen mit K_1, K_2 bzw. K_{12} die polare Figur von C_1, C_2 bzw. C_{12} in bezug auf einen festen Kreis C_0 der Ebene ε, mit t_1 bzw. t_2 die Polare des Punktes O_1 bzw. O_2, mit Q den Schnittpunkt von t_1 und t_2 und mit W_1 und W_2 die zwei Gebiete (Winkelräume), in welche die projektive Ebene durch t_1 und t_2 geteilt wird.

Aus diesen Definitionen folgt, daß K_{12} eine Kurve der Klasse $n_{12} = n_1 + n_2$ vom Maximalklassenindex ist, die aus zwei Zügen K_1 und K_2 vom Geschlecht Null besteht und keine Wendetangente besitzt. Bezeichnet G_1 bzw. G_2 das (von K_1 bzw. K_2 begrenzte) Gebiet der projektiven Ebene, dessen Punkte an K_1 bzw. K_2 $n_1 - 2$ bzw. $n_2 - 2$ Tangenten senden, so sind G_1 und G_2 einfach zusammenhängend und haben keinen Punkt gemeinsam [22]).

Da die Kurve C_{12} mit jedem durch O_1 und O_2 gehenden Kegelschnitt der Ebene entweder $2n_{12}$ oder $2n_{12} - 2$ Punkte (inbegriffen O_1 und O_2) gemeinsam hat, muß die Kurve K_{12} mit jedem von t_1 und t_2 berührten Kegelschnitt entweder $2n_{12}$ oder $2n_{12} - 2$ Tangenten (inbegriffen t_1 und t_2) gemeinsam haben. Dies tritt aber nur dann ein, wenn der eine Zug von K_{12} in W_1, der andere in W_2 liegt, wie wir jetzt beweisen werden.

Haben nämlich beide Züge K_1 und K_2 Punkte in W_1, so gibt es in W_1 einen Punkt P_0, der an K_1 bzw. K_2 n_1 bzw. n_2 Tangenten sendet. Ist G_0 das größte Gebiet, das P_0 enthält und von K_1, K_2, t_1 und t_2 begrenzt wird, so kann man aus den Punkten von G_0 die konvexe Seite von K_1 und K_2 erreichen. Bezeichnet γ_1 einen auf dem Rand von G_0 liegenden Bogen von K_1, so können wir annehmen, daß die Endpunkte von γ_1 auf t_1 oder auf t_2 oder auf t_1 und t_2 liegen. Die Kurve K_1 und damit auch γ_1 hat außer t_1 und t_2 keine Tangenten durch Q. Bezeichnen W_1' und W_1'' die einfachen Winkelräume der euklidischen Ebene, aus denen W_1 besteht, so können wir annehmen, daß γ_1 beschränkt ist und seine Punkte in W_1' liegen.

(Weil Q außerhalb von K_1 liegt, gibt es eine zu Q genügend benachbarte Gerade g, von der K_1 in W_1 nicht getroffen wird. Projiziert man g in die unendlichferne Gerade der projektiven Ebene, so führt diese Projektion den Bogen γ_1 in einen beschränkten Bogen über, der nur in dem einen einfachen Winkelraume der Projektion von W_1 Punkte haben kann.)

---

[22]) Sz. N. **11**, 179.

Wir bezeichnen mit e eine beliebige Gerade, die durch Q geht und in W_1' liegt. Eine Gerade e wird von Q in zwei Halbgeraden geteilt, von denen nur die in W_1' liegende Halbgerade mit γ_1 Punkte gemeinsam haben kann.

Der Bogen γ_1 wird von jeder Geraden e in je einem Punkte getroffen.

Dies folgt aus der Tatsache, daß von einem Punkte Q aus an einen beschränkten Bogen (eindeutiges stetiges Streckenbild) eine Stützgerade gezogen werden kann, wenn durch Q eine Gerade geht, von welcher der Bogen in zwei, *durch Q nicht getrennten*, Punkten getroffen wird. (Die fragliche Stützgerade soll dabei den Bogen nicht in einem Endpunkte stützen.)

Wird nämlich γ_1 von einer Geraden e in mindestens zwei (getrennten oder zusammenfallenden) Punkten getroffen, so hat γ_1 mindestens eine Tangente durch Q, die entweder die Tangente eines Rückkehrpunktes von γ_1 oder eine Stützgerade eines der Teilbogen ist, in welche γ_1 von seinen Rückkehrpunkten geteilt wird.

Der Punkt Q sendet außer t_1 und t_2 keine andere Tangente an K. Jede Gerade e trifft also γ_1 in je einem Punkte. Daraus folgt, daß der Bogen γ_1 (und ebenso der Bogen γ_2) ein Konvexbogen ist, weil er keinen singulären Punkt und keine Wendetangente hat und keine Spirale oder Doppelspirale sein kann [23]).

Auf Grund dessen kann man leicht einsehen, daß das Gebiet G_0 von je einem Konvexbogen der Kurven K_1 und K_2 und von je einer Strecke der Geraden t_1 und t_2 begrenzt wird. Der Konvexbogen γ_1 bzw. γ_2 (mit der einen Verbindungsstrecke seiner Endpunkte) bestimmen je einen Konvexbereich. Diese zwei Konvexbereiche liegen getrennt, weil sie Teilgebiete von G_1 bzw. G_2 sind. Sie haben also vier Stützgeraden gemeinsam, unter denen zwei mit t_1 und t_2 zusammenfallen, die übrigen zwei aber gemeinsame und von t_1 und t_2 verschiedene Tangenten der Konvexbogen γ_1 und γ_2 sind. Diese zwei Tangenten fallen zusammen, falls γ_1 und γ_2 einander berühren. Ist s die in G_0 liegende Strecke der einen gemeinsamen Tangente von γ_1 und γ_2, so liegen ihre Endpunkte auf t_1 und t_2.

Wir können annehmen, daß das Gebiet G_0 endlich ist. Dann bezeichnen wir mit E eine in W_1 liegende und von t_1 und t_2 berührte Ellipse. Es gibt in der genügend kleinen Umgebung von s offenbar eine Ellipse E^*, von der die Kurve K_1 bzw. K_2 in der Umgebung ihres Berührungspunktes mit s in zwei Punkten geschnitten und sonst nicht getroffen wird. Diese Ellipse hat aber nur $2n_1 - 2$ Tangenten mit K_1 und nur $2n_2 - 2$ Tangenten mit K_2, also nur $2n_{12} - 4$ Tangenten mit K_{12} (inbegriffen die Tangenten t_1 und t_2) gemeinsam.

Die Ellipse E^* läßt sich durch stetige Deformation der Ellipse E aus einer solchen Ellipse E_1 hervorbringen, welche außerhalb von G_1 liegt. Der Lage nach bildet E_1 mit K_1 eine reduzible Kurve $(n_1 + 2)$-ter Klasse vom Maximalklassenindex. Die Anzahl der gemeinsamen Tangenten von E_1 und K_1 ist also $2n_1$. Diese Anzahl bleibt unverändert, wenn E_1 in eine außerhalb von G_1 liegende Ellipse E_{10} übergeht, die in einem Punkte P die Kurve K_1 berührt. Die Tangente t von E_{10} und K_1 im Punkte P ist in der Anzahl der gemeinsamen Tangenten von E_{10} und K_1 doppelt zu rechnen. Während E_{10} durch stetige Deformation in E^* übergeht, verschwindet die doppelt zu rechnende gemeinsame Tangente t. Die Anzahl der übrigen gemeinsamen Tangenten wird aber während dieser Deformation unverändert. Die Kurven E^* und K_1 haben also $2n_1 - 2$ Tangenten gemeinsam.

Die Ellipse E^* läßt sich gleichfalls durch stetige Deformation der Ellipse E aus einer außerhalb von G_2 liegenden Ellipse E_2 erhalten. Daraus folgt, daß E^* mit K_2 $2n_2 - 2$ Tangenten gemeinsam hat.

---

[23]) A. Kneser, Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Kurven. Math. Annalen **41** (1893), 356–362.

Enthält also W_1 Punkte beider Kurven K_1 und K_2 im Innern, so gibt es einen von t_1 und t_2 berührten Kegelschnitt, der mit K_{12} $2n_{12}-4$ statt $2n_{12}-2$ oder $2n_{12}$ Tangenten gemeinsam hat. Dies ist aber nach dem Vorigen unmöglich.

Enthält also W_1 die Kurve K_1, so liegt K_2 in W_2.

Bezeichnet K_3 die polare Figur der Kurve C_3 in bezug auf den angenommenen Kreis C_0, so muß auch K_3 in W_2 liegen, weil K_{13} in bezug auf t_1 und t_2 ähnliche Eigenschaften hat wie K_{12}. Beide Kurven K_2 und K_3 können nicht in W_2 liegen, weil die aus ihnen bestehende Kurve K_{23} vom Maximalkassenindex sich in bezug auf t_1 und t_2 ebenso verhält wie K_{12} oder K_{13}.

Aus dieser Unmöglichkeit folgt der Satz XII.

9. Über Flächen vom Maximalindex mit einer Regelflächenschale.

Wir werden den folgenden Satz beweisen:

XIII. *Ist eine Schale einer mehrschaligen Fläche F von n-ter Ordnung und vom Maximalindex eine Regelfläche H zweiter Ordnung, so bilden die übrigen Schalen von F eine Fläche F_1 der Ordnung $n_1 = n-2$ und vom Maximalindex, die mit beiden Systemen der Erzeugenden von H je $n-2$ Geraden gemeinsam hat.*

Eine Ebene ε durch eine Erzeugende e von H ist eine Berührungsebene der Fläche F von n-ter Ordnung. Die durch den Berührungspunkt gehenden Geraden der Ebene ε sind Tangenten von F, sie treffen also F in je n Punkten. Die Ebene ε schneidet aus F eine Kurve C von n-ter Ordnung und vom Maximalindex, aus H zwei Geraden, aus F_1 also eine Kurve C_1 von $n-2$-ter Ordnung aus. Es ist nicht ausgeschlossen, daß C in n Geraden zerfällt; dann besteht C_1 aus $n-2$ Geraden.

Daraus folgt, daß F_1 von jeder Geraden des Raumes, die die Fläche H schneidet, in entweder $n-2$ oder in $n-4$ Punkten getroffen wird. Ist nämlich P der Schnittpunkt der Geraden g mit H und ist e die eine Erzeugende von H durch P, so liegt g in der Ebene (g, e).

Für den Beweis, daß F_1 den Maximalindex hat, müssen wir nur zeigen, daß F_1 mit keiner Geraden, die H nicht trifft und nicht auf F_1 liegt, mehr als $n-2$ Punkte gemeinsam hat.

Wäre die Ordnung von F_1 nicht $n-2$, so wäre sie gleich n. In diesem Falle gäbe es eine Gerade g, die mit F_1 n Punkte gemeinsam hat. Man könnte dann durch Bewegung von g im Raume eine Gerade g' treffen, von der F_1 in n Punkten getroffen und unter diesen in einem Punkte P' berührt ist. Die Gerade g' hätte also keinen Punkt mit H gemeinsam.

Wir bezeichnen mit C', C_1' bzw. K' die Kurven, die von der Berührungsebene ε' der Fläche F_1 im Punkte P' aus F, F_1 bzw. H ausgeschnitten werden. C' ist eine Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex, K' ist ein Kegelschnitt, der nicht durch P' geht. Die Ebene ε' berührt auch F. Die durch P' gehenden Geraden f der Ebene ε' treffen also die Kurve C' in je n Punkten. Unter diesen Geraden f gibt es Geraden, von denen K' getroffen wird, und auch solche, von denen K' nicht getroffen wird, wie z. B. die Gerade g'. Daraus folgt, daß P' an K' zwei Tangenten f_1 und f_2 aussendet.

Dreht sich eine Gerade f in der Ebene ε' um P' von der Anfangslage g' ausgehend, so bleibt die Anzahl der Schnittpunkte der Geraden f mit C' auch dann unverändert, wenn f die Tangente f_1 oder f_2 überschreitet. Dann nimmt aber die Anzahl der gemeinsamen Punkte von f mit der einen der Kurven C_1' und K' um Zwei ab, mit der anderen um Zwei zu. Diese Abnahme und Zunahme geschieht gleichzeitig. In der Grenzlage f_1 oder f_2 der Geraden f muß also die Gerade f mit C' $n+2$ Punkte gemeinsam haben. Dies ist aber auch dann unmöglich, wenn f_1 und f_2 auf F_1 liegen, also Teile von C_1' sind.

Besteht die Kurve C' aus m Geraden durch P' und aus einer Kurve C^*, die keine Gerade durch P' enthält, so ist C^* offenbar vom Maximalindex. Eine Gerade f hat mit C^* höchstens $n - m$ Punkte gemeinsam. Die Gerade f_1 hat aber zwei Punkte mit K' gemeinsam und $n - m$ Punkte mit der Kurve C_1^*, die aus C_1' durch Weglassen der m Geraden entsteht. Die Anzahl der gemeinsamen Punkte von f_1 und C^* ist also größer als die Ordnung von C^*. Dies ist aber unmöglich.

Aus dieser Unmöglichkeit folgt, daß F_1 die Ordnung $n - 2$ hat. Die Fläche F zerfällt also in H und F_1.

Zum Beweis des Satzes XIII müssen wir nur zeigen, daß F_1 von jeder Erzeugenden e von H in $n - 2$ Punkten getroffen wird. Dies folgt daraus, daß H von einer Ebene, die durch eine Erzeugende e von H geht, in einem Punkte P von e berührt wird. Die Geraden dieser Ebene, die durch P gehen, sind Tangenten von F und haben deshalb mit F n, mit F_1 $n - 2$ Punkte gemeinsam. Zu diesen Geraden gehört auch die Gerade e.

Aus dem Satz XIII läßt sich der folgende Satz ableiten:

XIV. *Unter den Schalen einer Fläche vom Maximalindex gibt es höchstens zwei Regelflächen von zweiter Ordnung.*

Wir nehmen an, daß die Fläche F von n-ter Ordnung und vom Maximalindex unter ihren Schalen m Regelflächen von zweiter Ordnung hat. Wir bezeichnen diese Regelflächen von zweiter Ordnung mit $H_1, H_2, \ldots, H_m$. Nach Satz XIII zerfällt F in H_1 und in eine Fläche F_1 von $(n-2)$-ter Ordnung und vom Maximalindex mit $m - 1$ Regelflächenschalen von zweiter Ordnung. Gleichfalls zerfällt F_1 in H_2 und in eine Fläche F_2 von $(n-4)$-ter Ordnung. Die Fläche F zerfällt also in H_1, H_2 und F_2. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir, daß F in die Flächen $H_1, H_2, \ldots, H_m$ und in eine Fläche F_m von $(n-2m)$-ter Ordnung und vom Maximalindex zerfällt. Dann bilden aber $H_1, H_2, \ldots, H_m$ eine Fläche von $2m$-ter Ordnung und vom Maximalindex. Dies ist aber nur dann möglich, wenn $m \leqq 2$ ist [24]).

Wir beweisen noch den Satz:

XV. *Zerfällt eine Fläche F vom Maximalindex in die Flächen F_1 und F_2, von denen F_1 eine Regelfläche der Ordnung größer als Zwei ist, so ist auch F_2 eine Regelfläche.*

Ist n bzw. n_1 die Ordnung von F bzw. F_1, so ist $n_2 = n - n_1$ die Ordnung von F_2. Ist nun e eine gewöhnliche Erzeugende von F_1, so wird F_2 von e in $n_2 = n - n_1$ Punkten getroffen. In der Berührungsebene von F_1 in einem auf e liegenden gewöhnlichen Punkte P sind nämlich die durch P gehenden Geraden Tangenten von F. Sie treffen also F in n Punkten, von denen $n_2 = n - n_1$ auf F_2 fallen. Im Sinne der in der Einleitung gegebenen Definition wird also F_2 auch von e in n_2 Punkten getroffen.

Unter den n_2 Punkten, in denen F_2 von e getroffen wird, können keine zwei benachbarten Punkte zusammenfallen. Andernfalls gäbe es nämlich in der Umgebung von e eine Gerade, die mit F nur $n - 4$ Punkte gemeinsam hat, weil F von e im Punkte P berührt wird.

Daraus folgt, daß die gemeinsamen Punkte der Erzeugenden von F_1 mit F_2 auf n_2 Geraden liegen. Von diesen Geraden sind nicht mehr als Zwei von einander verschieden. Andernfalls wäre nämlich F_1 eine Regelfläche zweiter Ordnung, weil ihre Erzeugenden drei verschiedene Sekanten hätten.

Sind g_1 und g_2 die gemeinsamen Geraden von F_1 und F_2, so ist die Summe der Multiplizitäten dieser zwei Geraden auf F_2 nach dem Vorigen gleich n_2. Ist nun Q ein beliebiger Punkt von F_2, der außerhalb von g_1 und g_2 liegt, so gehört die Gerade durch Q,

---

[24]) Sz. N. 3.

von der g_1 und g_2 geschnitten wird, der Fläche F_2 an. Widrigenfalls hätte diese Gerade mit F_2 mindestens $n_2 + 1$ Punkte gemeinsam.

Damit haben wir bewiesen, daß F_2 eine Regelfläche ist. Nach Satz XII ist F_2 einschalig.

Die Frage, ob es eine mehrschalige Fläche vom Maximalindex gibt, die unter ihren Schalen mindestens eine Regelfläche und mindestens eine von Regelflächen verschiedene Fläche besitzt, müssen wir offen lassen.

10. Über die Existenz gewöhnlicher Flächen vom Maximalindex.

Eine Fläche vom Maximalindex, die unter ihren Schalen keine Regelfläche und keine Kegelfläche besitzt, wird im folgenden von uns *gewöhnlich* genannt.

Wir haben in der Arbeit: „Über Flächen vom Maximalindex“ [25]) (Satz XXVI) algebraische und nichtalgebraische Flächen vom Maximalindex dargestellt, deren Schalen von Kegelflächen verschieden sind. Man kann leicht einsehen, daß die dort dargestellten Flächen vom Maximalindex gewöhnlich sind, weil sie keine Regelflächenschale besitzen.

Die allgemeine ebene Schnittkurve der dort dargestellten Flächen n-ter Ordnung vom Maximalindex ist nämlich eine aus p Zügen vom Geschlecht Eins bestehende ebene irreduzible Kurve n-ter Ordnung vom Geschlecht p. Die p Schalen haben also das Geschlecht Eins, sie können also keine Regelflächen sein, weil die einschaligen Regelflächen vom Maximalindex das Geschlecht Null haben.

Auf Grund des angedeuteten Satzes können wir die folgenden Sätze aussprechen:

XVI. *Es gibt für jede Ordnung n ($\geqq 3$) gewöhnliche Flächen n-ter Ordnung vom Maximalindex, die vom Geschlecht p ($0 < p \leqq n-2$) sind und aus p Schalen vom Geschlecht Eins bestehen.*

XVII. *Es gibt für jede Ordnung $n(\geqq 3)$ gewöhnliche einschalige Flächen vom Maximalindex und vom Geschlecht Eins.*

Es gilt auch der Satz:

XVIII. *Es gibt für jede gerade Ordnung n gewöhnliche einschalige Flächen n-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlecht Null.*

Für den Beweis dieses Satzes benützen wir den folgenden Hilfssatz [26]):

Ist $n = 2m$ eine gerade positive Zahl, stellen die Gleichungen

$$e_k \equiv y - a_k x = 0, \quad f_k \equiv y - b_k x = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2 = 2m-2)$$

voneinander verschiedene Geraden dar, deren zyklische Aufeinanderfolge in ihrem Strahlenbüschel

$$e_1\, e_2\, f_1\, f_2\, e_3\, e_4 \cdots e_{n-3}\, e_{n-2}\, f_{n-3}\, f_{n-2} \tag{3}$$

ist, liegt ferner die y-Achse im Winkelraum der benachbarten Geraden e_2 und f_1 und ist endlich $H(x, y)$ eine positiv definite quadratische Form von x und y, so stellt die Gleichung

$$e_1\, e_2 \cdots e_{n-2} - H f_1\, f_2 \cdots f_{n-2} = 0 \tag{4}$$

eine Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlecht $n-2$ dar, die aus $n-2$ Zügen dritter Ordnung besteht.

Läßt man in der Aufeinanderfolge (3) zwei benachbarte e_k-Geraden oder f_k-Geraden zusammenfallen, so vereinigen sich zwei benachbarte Züge der Kurve (4) in einem Doppelpunkte und damit vermindert sich das Geschlecht um Eins.

---

[25]) Sz. N. **1**, 677—679.

[26]) Sz. N. **1**, 674—679; **8**, 418—422.

Daraus folgt der Satz [27]):

XIX. *Ist $n = 2m$ eine gerade positive Zahl, stellen die Gleichungen*

$$e_k \equiv y - a_k x = 0, \quad f_k \equiv y - b_k x = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1)$$

voneinander verschiedene $2m - 2 = n - 2$ Geraden dar, deren zyklische Aufeinanderfolge in ihrem Strahlenbüschel

$$e_1 f_1 e_2 f_2 \cdots e_{m-1} f_{m-1}$$

ist und liegt die y-Achse im Winkelraum der benachbarten Geraden e_1 und f_1, so ist

$$e_1^2 e_2^2 \cdots e_{m-1}^2 - (x^2 + y^2 + z^2) f_1^2 f_2^2 \cdots f_{m-1}^2 = 0 \tag{5}$$

die Gleichung einer einschaligen gewöhnlichen Fläche von n-ter Ordnung, vom Maximalindex und vom Geschlecht Null.

Diese Fläche ist vom Geschlecht Null, weil sie eine $(n-2)$-fache Gerade (die z-Achse) und außerdem $2(m-1) = n-2$ Doppelgeraden hat. $m-1$ von diesen Doppelgeraden sind die Schnittgeraden der unendlichfernen Ebene mit den Ebenen $f_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$, die übrigen $m-1$ fallen in die z-Achse.

Die Fläche (5) ist vom Maximalindex. Sie wird von einer Geraden, von der die z-Achse geschnitten wird, in mindestens $n-2$ Punkten getroffen. Jede andere Gerade liegt in einer Ebene mit Gleichung von der Form

$$z = ax + by.$$

Die Schnittkurve der Fläche (5) mit einer solchen Ebene ist nach dem vorigen Hilfssatz eine einzügige Kurve von n-ter Ordnung, vom Maximalindex und vom Geschlecht Null.

Daraus folgt, daß die Fläche einschalig ist. Sie ist keine Kegelfläche. Wäre nun die Fläche eine Regelfläche, so wäre die z-Achse ihre $(n-2)$-fache Leitgerade. Die Fläche würde dann von jeder Ebene durch die z-Achse in lauter Geraden getroffen. Dies trifft aber nicht zu. Die Ebene $x = 0$ schneidet z. B. aus der Fläche außer der z-Achse den Kreis $y^2 + z^2 = 1$ aus.

Damit ist der Satz XIX bewiesen.

In der Arbeit „Über Flächen vom Maximalindex" habe ich eine fünfschalige gewöhnliche Fläche von sechster Ordnung und vom Maximalindex konstruiert, die aus einem Ovaloid und aus vier Schalen von dritter Ordnung besteht (Satz XXIV) [28]). Die vier unpaaren Schalen schneiden einander in den sechs Kanten eines Tetraeders.

Läßt man 1, 2 oder 3 unpaare Schalen dieser Fläche weg, so bilden die übrigbleibenden Schalen eine gewöhnliche Fläche 5-ter, 4-ter bzw. 3-ter Ordnung vom Maximalindex. Es gilt also der Satz:

XX. *Es gibt für $n = 6, 5, 4, 3$ gewöhnliche Flächen n-ter Ordnung vom Maximalindex, die aus $n-1$ Schalen bestehen. Unter diesen $n-1$ Schalen ist eine von zweiter Ordnung, die übrigen sind aber von dritter Ordnung.*

11. Die Existenz einschaliger Flächen vom Maximalindex, deren Geschlecht größer als Eins ist.

Das Geschlecht der einzügigen ebenen Kurven vom Maximalindex ist entweder Null oder Eins [29]). Es gibt aber einschalige Flächen vom Maximalindex, deren Geschlecht beliebig groß ist. Es gilt nämlich der Satz:

---

[27]) Vgl. den Satz XXVI, Sz. N. **1**, 677—678.

[28]) Sz. N. **1**, 671—672.

[29]) Sz. N. **10** und **11**.

XXI. *Es gibt für jede Ordnung n (> 2) einschalige Flächen n-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlecht $n-2$ und solche vom Geschlecht $n-3$.*

Dieser Satz folgt aus dem folgenden:

XXII. *Stellen die Gleichungen*

$$e_h \equiv y - a_h x = 0, \quad f_k \equiv y - b_k x = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n-2;\ k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

voneinander verschiedene Geraden dar, deren Aufeinanderfolge in ihrem Strahlenbüschel

$$e_1 f_1 e_2 f_2 \cdots e_{n-2} f_{n-2} f_{n-1} \tag{6}$$

ist, so ist

$$e_1 e_2 \cdots e_{n-2} - z f_1 f_2 \cdots f_{n-2} f_{n-1} = 0 \tag{7}$$

die Gleichung einer einschaligen Monoidfläche n-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlecht $n-2$.

Ist die Aufeinanderfolge der $2(n-2)$ Geraden e_h und f_h ($h = 1, 2, \ldots, n-2$) dieselbe wie vorher, so stellt die Gleichung

$$e_1 e_2 \cdots e_{n-2} - z f_1 f_2 \cdots f_{n-3} f_{n-2}^2 = 0 \tag{8}$$

eine einschalige Fläche n-ter Ordnung vom Maximalindex und vom Geschlecht $n-3$ dar.

Wir beweisen diesen Satz erst für die Fläche (7).

Die z-Achse ist eine $(n-2)$-fache Gerade der Fläche (7). Aus der Form

$$z = \frac{e_1 e_2 \cdots e_{n-2}}{f_1 f_2 \cdots f_{n-2} f_{n-1}}$$

der Gleichung (7) folgt, daß die Fläche (7) eine Monoidfläche ist. Die zur z-Achse parallelen Geraden treffen die Fläche außer in dem unendlichfernen Punkte der z-Achse, der für die Fläche ein $(n-1)$-facher Punkt ist, noch in je einem Punkte. Die zur z-Achse parallelen Ebenen schneiden im allgemeinen solche Kurven aus der Fläche, die in dem unendlichfernen Punkte der z-Achse einen $(n-1)$-fachen Punkt haben. Sie sind deshalb einzügig.

Daraus folgt, daß die Fläche (7) aus einer Schale besteht.

Die Ebene $z = 0$ schneidet die Fläche (7) in der zweifach gerechneten unendlichfernen Geraden und in den $n-2$ Geraden $e_1 = 0$, $e_2 = 0, \ldots, e_{n-2} = 0$ dieser Ebene. Die Ebenen durch die z-Achse schneiden die Fläche (7) in mindestens $n-2$ Geraden, von denen $n-2$ in die z-Achse fallen. Eine Gerade, die entweder in die Ebene $z = 0$ fällt oder die z-Achse schneidet, hat also mindestens $n-2$ Punkte mit der Fläche (7) gemeinsam.

Durch eine Gerade, die zur z-Achse windschief ist und die nicht in die Ebene $z = 0$ fällt, läßt sich eine Ebene

$$z = cy - b_n x \equiv f_n \tag{9}$$

legen, bei der höchstens der eine der reellen Koeffizienten c und b_n verschwindet.

Ist K die Schnittkurve der Fläche (7) mit der Ebene (9), so hat ihre zur z-Achse parallele Projektion auf die Ebene $z = 0$ die Gleichung

$$e_1 e_2 \cdots e_{n-2} - f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n = 0. \tag{10}$$

Diese Kurve K' ist nach einem Satze von mir [30]) von n-ter Ordnung und vom Maximalindex.

---

[30]) Sz. N. **1**, 676—677. In der Gleichung (3) (S. 677) findet sich ein leicht bemerkbarer Druckfehler. Die richtige Gleichung lautet

$$U_{n-2}(x, y) \cdot z^2 + \overline{U}_{n-2}(x, y) \cdot W_2(x, y) = 0.$$

Aus der Beziehung zwischen den Kurven K und K' folgt, daß die Kurven K und K' dieselbe Ordnung, denselben Index, dieselbe Anzahl der singulären Punkte und deshalb dasselbe Geschlecht haben.

Daraus folgt, daß die Fläche (7) den maximalen Index hat, weil sie von jeder Geraden in mindestens $n-2$ Punkten getroffen wird.

Fällt die Gerade $f_n = 0$ der Ebene $z = 0$ mit keiner der $2n-3$ Geraden e_h und f_k ($h = 1, 2, \ldots, n-2$; $k = 1, 2, \ldots, n-1$) zusammen, so hat die Kurve K' (und damit auch die Kurve K) das Geschlecht $n-2$, weil sie außer dem $(n-2)$-fachen Punkte $O = (0, 0)$ keinen singulären Punkt hat. Diese Kurve K' n-ter Ordnung hat also das möglichst grosse Geschlecht $n-2$. Daraus folgt, daß das Geschlecht der Fläche (7) n-ter Ordnung gleich $n-2$ ist, weil die Fläche eine allgemeine ebene Schnittkurve vom Geschlecht $n-2$ hat.

Damit ist der Satz für die Fläche (7) bewiesen ist.

Ähnlich läßt sich der Satz XXII für die Fläche (8) bewiesen. Diese Fläche hat aber das Geschlecht $n-3$, weil die zur z-Achse parallele Projektion der Schnittkurve der Fläche mit der Ebene (9) die Gleichung

$$e_1 e_2 \cdots e_{n-2} - f_1 f_2 \cdots f_{n-3} f_{n-2}^2 f_n = 0 \tag{11}$$

hat. Weicht die Gerade $f_n = 0$ von den $2n-3$ Geraden e_h und f_k ab, so hat die Kurve (11) außer dem $(n-2)$-fachen Punkte O noch einen Doppelpunkt, der auf der Geraden $f_{n-2} = 0$ liegt. Daraus folgt, daß auch die Fläche (8) das Geschlecht $n-3$ hat.

Der Satz XXI wird durch den folgenden ergänzt:

XXIII. *Ist das Geschlecht einer einschaligen Fläche vom Maximalindex größer als Eins, so ist die Fläche gewöhnlich.*

Eine einschalige Regelfläche vom Maximalindex hat nämlich das Geschlecht Null, eine einschalige Kegelfläche vom Maximalindex hat das Geschlecht Null oder Eins ebenso wie eine einzügige ebene Kurve vom Maximalindex.

Eingegangen 31. Oktober 1939.

Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2. (Teil I.)

Von *Cahit Arf* in Istanbul.

Einleitung.

Witt [1]) hat eine Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern k aufgestellt. Er setzt dabei jedoch voraus, daß k nicht die Charakteristik 2 hat. Dann ist jede quadratische Form in eine Diagonalform $F = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ transformierbar. Unter Heranziehung eines durch F metrisierten Vektorraumes wird in W. Q. bewiesen, daß die Algebra $\prod_{i<j} (a_i, a_j)$ und die Zahlklasse $\prod_i a_i k^2$ Invarianten der Form F sind, und daß diese Invarianten zusammen mit n für spezielle Körper k die Form F bis auf äquivalente charakterisieren.

Wir wollen in diesem ersten Teil mittels ähnlicher Methoden wie in W. Q. den dort nicht betrachteten Fall untersuchen, daß k die Charakteristik 2 hat. Das Ergebnis dieser Untersuchung soll dann in einem zweiten Teil angewendet werden auf die Aufstellung der Invarianten für die arithmetische Äquivalenz der binären, ternären und quaternären Formen in einem Potenzreihenkörper mit Koeffizienten aus einem vollkommenem Körper der Charakteristik 2.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich H. Hasse [2]).

I. Quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2.

Wir legen einen festen Körper k der Charakteristik 2 als Grundkörper zugrunde und betrachten quadratische Formen

$$F = \sum_{1 \le i \le j \le m} a_{ij} x_i x_j$$

mit Koeffizienten a_{ij} aus k.

Wie in W. Q. ordnen wir einer quadratischen Form F einen durch sie metrisierten Vektorraum

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{m} k\,\mathfrak{u}_i = \langle \mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_m \rangle$$

über k zu, indem wir das Längenquadrat eines Vektors

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathfrak{u}_i$$

aus $\mathfrak{R}$ durch

---

[1]) E. Witt, Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. Dieses Journal **176** (1937), 31—44; im folgenden mit W. Q. zitiert.

[2]) Anmerkung des Herausgebers: Im Einverständnis mit dem Verfasser habe ich dessen ursprüngliches Ms. überarbeitet.

$$|\mathfrak{x}|^2 = F(\mathfrak{x})$$

definieren. Eine Äquivalenz $F \simeq F'$ zwischen zwei Formen F und F' drückt sich dann durch die Isomorphie $\mathfrak{R} \simeq \mathfrak{R}'$ der zugeordneten metrischen Räume aus, also durch eine umkehrbar eindeutige lineare längentreue Zuordnung zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$. Die verschiedenen zu F äquivalenten Formen entsprechen umkehrbar eindeutig den verschiedenen Basen von $\mathfrak{R}$.

Für zwei Vektoren

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathfrak{u}_i, \quad \mathfrak{y} = \sum_{i=1}^{m} y_i \mathfrak{u}_i$$

aus $\mathfrak{R}$ definieren wir das skalare Produkt durch die Beziehung

$$|\mathfrak{x} + \mathfrak{y}|^2 = |\mathfrak{x}|^2 + |\mathfrak{y}|^2 + \mathfrak{x}\mathfrak{y},$$

also als die Bilinearform

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{1 \le i < j \le m} a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i).$$

Ist $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0$, so sagen wir, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind senkrecht zueinander. Ist $\mathfrak{r}$ ein Teilraum von $\mathfrak{R}$, und ist $\mathfrak{y}$ senkrecht zu allen $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{r}$, so nennen wir $\mathfrak{y}$ senkrecht zu $\mathfrak{r}$. Mit $\mathfrak{r}^*$ bezeichnen wir den Teilraum aller zu $\mathfrak{r}$ senkrechten Vektoren aus $\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{s}$ ein weiterer Teilraum von $\mathfrak{R}$, und sind alle $\mathfrak{y}$ aus $\mathfrak{s}$ senkrecht zu $\mathfrak{r}$, so sagen wir, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ sind senkrecht zueinander. Unter einer *direkten Zerlegung* $\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \mathfrak{s}$ verstehen wir eine Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in zwei zueinander fremde und zueinander senkrechte Teilräume $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$. Ihr entspricht eine Darstellung $F = f + g$ als Summe zweier Formen f und g in untereinander verschiedenen Variablen. Wir verwenden das Pluszeichen bei Räumen und Formen nur im Sinne dieser direkten Zerlegung.

Durch $\mathfrak{R}$ ist invariant der Teilraum $\mathfrak{R}^*$ aller zu dem vollen Raum $\mathfrak{R}$ senkrechten Vektoren aus $\mathfrak{R}$ bestimmt. Er zerfällt direkt in eindimensionale Teilräume:

$$\mathfrak{R}^* = \sum_{j=1}^{n^*} \langle \mathfrak{w}_j \rangle.$$

Ist $\mathfrak{R}^* = 0$, so nennen wir $\mathfrak{R}$ und die zugehörigen Formen *vollregulär*. Es gilt nun weiter:

Satz 1. *Der Raum $\mathfrak{R}$ zerfällt direkt in zweidimensionale vollreguläre Teilräume und $\mathfrak{R}^*$:*

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle + \mathfrak{R}^* \quad \textit{mit} \quad \mathfrak{u}_i\mathfrak{v}_i \neq 0.$$

Beweis. Ist $\mathfrak{u}_1$ ein nicht zu $\mathfrak{R}^*$ gehöriger Vektor aus $\mathfrak{R}$, so gibt es in $\mathfrak{R}$ einen Vektor $\mathfrak{v}_1$ mit $\mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1 \neq 0$. Da $\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_1 = 0$, $\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_1 = 0$, sind dann $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{v}_1$ linear unabhängig, und jeder Vektor $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{R}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$\mathfrak{x} = (\alpha_1 \mathfrak{u}_1 + \beta_1 \mathfrak{v}_1) + \mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}_1 \text{ in } \langle \mathfrak{u}_1\ \mathfrak{v}_1 \rangle^*,$$

nämlich mit

$$\alpha_1 = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{v}_1}{\mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1}, \quad \beta_1 = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{u}_1}{\mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1}.$$

Somit ist

$$\mathfrak{R} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1) + \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle^*.$$

Ist $\langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle^*$ noch umfassender als $\mathfrak{R}^*$, so kann man auf $\langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle^*$ statt $\mathfrak{R}$ dieselbe Schlußweise anwenden. So ergibt sich schließlich die Behauptung.

Zusatz. *Ist $\mathfrak{r}$ ein vollregulärer Teilraum von $\mathfrak{R}$, so ist*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \mathfrak{r}^*.$$

Nach dem Verfahren des eben geführten Beweises kann man nämlich eine direkte Zerlegung

$$\mathfrak{r} = \sum_{i=1}^{\nu} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle \quad \text{mit} \quad \mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_i \neq 0$$

zu einer direkten Zerlegung der obigen Form von $\mathfrak{R}$ ausbauen, und dabei erzeugen die hinzukommenden Teilräume gerade $\mathfrak{r}^*$.

Aus Satz 1 und der Bemerkung davor folgt unmittelbar:

Satz 2. *Jede quadratische Form ist in die Gestalt*

$$F = \sum_{i=1}^{n} (a_i x_j^2 + b_i x_i y_i + c_i y_i^2) + \sum_{j=1}^{n^*} d_j z_j^2 \quad \textit{mit} \quad b_i \neq 0$$

transformierbar. Dabei ist die Form

$$F^* = \sum_{j=1}^{n^*} d_j z_j^2$$

durch F bis auf äquivalente eindeutig bestimmt.

Der Zusammenhang der Normalform von Satz 2 mit der Zerlegung von Satz 1 wird durch die Formeln

$$|\, \mathfrak{u}_i \,|^2 = a_i, \quad \mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_i = b_i, \quad |\, \mathfrak{v}_i \,|^2 = c_i; \quad |\, \mathfrak{w}_j \,|^2 = d_j$$

gegeben. Wir nennen eine Form F von dieser Gestalt *quasidiagonal.* Die Quasidiagonalformen übernehmen hier die Rolle der Diagonalformen in W. Q. Die invariante Teilform F^* nennen wir den *quasilinearen Teil* von F; er ist das Längenquadrat im invarianten Teilraum $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{R}$. Der vollreguläre Teil von F ist nicht invariant, wohl aber seine Variablenanzahl $2n$. Bei vollregulären Formen fehlt der quasilineare Teil, und die Variablenanzahl $2n$ ist gerade.

Die Vektoren vom Längenquadrat 0 aus $\mathfrak{R}^*$ bilden einen Teilraum $\mathfrak{R}_0^*$ von $\mathfrak{R}^*$. Ist $\mathfrak{R}_0^* = 0$, so nennen wir $\mathfrak{R}$ und die zugehörigen Formen *regulär.* Wählt man eine Basis von $\mathfrak{R}$ so, daß darin eine Basis von $\mathfrak{R}_0^*$ enthalten ist, so erkennt man, daß jede quadratische Form in eine reguläre Form von ev. kleinerer Variablenanzahl transformierbar ist. Wir können daher im folgenden durchweg ohne Einschränkung die zu betrachtenden Formen als regulär voraussetzen. In der Quasidiagonalform sind dann die $d_j \neq 0$ und bilden eine Basis des Moduls $\sum_{j=1}^{n^*} d_j k^2$. Dieser Modul ist ein durch Quadratbildung entstehendes isomorphes Bild von $\mathfrak{R}^* = \sum_{j=1}^{n^*} k\mathfrak{w}_j$, er besteht aus den durch die Form F^* darstellbaren Elementen aus k. Die Beschränkung auf reguläre Formen tritt an die Stelle der Beschränkung auf Formen von Null verschiedener Diskriminante in W. Q.

Die Nulldarstellungen durch F entsprechen den Vektoren $\neq 0$ vom Längenquadrat 0 aus $\mathfrak{R}$. Stellt eine reguläre Form die Null dar, so sind dabei nicht alle Variablen des vollregulären Teils Null.

Um zu weiteren Invarianten zu gelangen, betrachten wir wie in W. Q. das der Form

$$F = \sum_{1 \leq i \leq j \leq m} a_{ij} x_i x_j$$

invariant zugeordnete Cliffordsche System

$$C(F) = \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m = 0, 1} k u_1^{\varepsilon_1} \cdots u_m^{\varepsilon_m}$$

mit der Multiplikationstafel

$$u_i^2 = a_{ii}, \quad u_i u_j + u_j u_i = a_{ij} \qquad (i < j).$$

$C(F)$ ist eine Algebra vom Rang 2^m über k. Es ist

$$F = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i u_i\right)^2.$$

Um zu einer direkten Zerlegung in normale einfache Algebren vom Rang 4 zu gelangen, mußte Witt in W. Q. der Form F anstelle von $C(F)$ die Algebra $C\left(F - \sum_{i=1}^{m} y_i^2\right)$ zuordnen. Das ist in unserem Falle nicht nötig. Vielmehr entspricht hier jeder quasidiagonalen Darstellung

$$F \simeq \sum_{i=1}^{n} f_i + F^*,$$

$$f_i = a_i x_i^2 + b_i x_i y_i + c_i y_i^2, \quad F^* = \sum_{j=1}^{n^*} d_j z_j^2$$

eine direkte Zerlegung von $C(F)$ selbst:

$$C(F) = \prod_{i=1}^{n} C(f_i) \cdot C(F^*).$$

Dabei ist

$$C(F^*) = \prod_{j=1}^{n^*} C(d_j z_j^2)$$

das Zentrum von $C(F)$.

$C(F^*)$ wird durch n^* Elemente w_j mit $w_j^2 = d_j$ erzeugt. Kommt in dem Modul $\sum_{j=1}^{n^*} d_j k^2$ der durch F^* darstellbaren Elemente aus k die 1 nicht vor, so ist $C(F^*)$ das direkte Produkt der n^* unabhängigen inseparablen quadratischen Körper $k(\sqrt{d_j})$, oder also, invariant beschrieben, der Körper $k(\sqrt{F^*})$ vom Grade 2^{n^*}, der durch Adjunktion der Quadratwurzeln aus den durch F^* darstellbaren Elementen aus k erzeugt wird. Dann ist also

$$C(F) = \prod_{i=1}^{n^*} C(f_i) \cdot k(\sqrt{F^*}).$$

Gibt es aber eine Darstellung $\sum_{j=1}^{n^*} d_j \gamma_j^2 = 1$, so entspricht ihr ein Element $w = 1 + \sum_{j=1}^{n^*} \gamma_j w_j$ aus $C(F^*)$ mit $w^2 = 0$. Dann ist $C(F^*)$ das direkte Produkt des Körpers $k(\sqrt{F^*})$, der jetzt nur den Grad 2^{n^*-1} hat, mit der durch w erzeugten Algebra $k + kw$ vom Rang 2. Dabei erzeugt w das Radikal $C(F^*)w = k(\sqrt{F^*})w$ von $C(F^*)$, und da die $C(f_i)$, wie wir gleich sehen werden, normale einfache Algebren sind, auch das Radikal $C(F)w = \prod_{i=1}^{n} C(f_i) \cdot k(\sqrt{F^*})w$ von $C(F)$. Läßt man den Fakter $k + kw$ aus dem direkten Produkt $C(F)$ fort, so entspricht das also der Reduktion der Algebra $C(F)$ auf die Restklassenalgebra nach ihrem Radikal. Da dies ein invarianter Prozeß ist, ist in dem betrachteten Falle auch die so entstehende Algebra

$$C_0(F) = \prod_{i=1}^{n} C(f_i) \cdot k(\sqrt{F^*})$$

eine Invariante der Form F.

Hierdurch wird man auf die Betrachtung der Invariante $C(F)$ für vollreguläre

$$F \simeq \sum_{i=1}^{n} f_i$$

zurückgeführt. Dann ist

$$C(F) = \prod_{i=1}^{n} C(f_i).$$

Für eine vollreguläre binäre Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

ist $C(f)$ eine normale einfache Algebra vom Rang 4, erzeugt durch zwei Elemente u, v mit den Relationen

$$u^2 = a, \quad uv + vu = b, \quad v^2 = c.$$

Um $C(f)$ als verschränktes Produkt darzustellen, setze man ohne Einschränkung $a \neq 0$ voraus, was ja durch eine der beiden Transformationen $x' = y$, $y' = x$ oder $x' = x$, $y' = x + y$ erreichbar ist. Dann kann man als Erzeugende auch

$$\omega = \frac{uv}{b}, \quad \theta = u$$

nehmen, mit den Relationen

$$\wp\omega = \frac{ac}{b^2}, \quad \theta\omega\theta^{-1} = \omega + 1, \quad \theta^2 = a.$$

Dabei ist zur Abkürzung $\wp\omega = \omega^2 + \omega$ gesetzt; wir schreiben ferner umgekehrt $\omega = \frac{ac}{b^2}/\wp$ für eine Wurzel von $\wp\omega = \frac{ac}{b^2}$. Hiernach ist $C(f)$ ein verschränktes Produkt mit dem separablen Körper $k\left(\frac{ac}{b^2}/\wp\right)$ als Zerfällungskörper. Die für diesen Zerfällungskörper charakteristische additive Klasse $\frac{ac}{b^2} + \wp\varkappa$, wo $\varkappa$ die Elemente aus k durchläuft, bezeichnen wir mit $\Delta(f)$ und schreiben auch kurz

$$\Delta(f) \equiv \frac{ac}{b^2} \mod \wp k.$$

Ferner setzen wir zunächst formal

$$\Delta(F) \equiv \sum_{i=1}^{n} \Delta(f_i) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i c_i}{b_i^2} \mod \wp k.$$

Wir werden beweisen, daß $\Delta(F)$ eine Invariante von F ist. Schließlich schreiben wir

$$N(x + y\omega) = (x + y\omega)(x + y(\omega + 1)) = x^2 + xy + \frac{ac}{b^2} y^2.$$

Es ist das die Norm im Zerfällungskörper $k\left(\frac{ac}{b^2}/\wp\right)$ von $C(f)$, wobei dieser aber, auch falls $\frac{ac}{b^2}/\wp$ in k liegt, als die Algebra $k + k\omega$, also dann als die direkte Summe zweier Exemplare von k aufgefaßt wird.

Satz 3. *Zwei vollreguläre binäre Formen*

$$F = ax^2 + bxy + cy^2, \quad F' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$$

sind dann und nur dann äquivalent, wenn

$$C(F) \simeq C(F')$$

und

$$\Delta(F) \equiv \Delta(F') \mod \wp k$$

ist.

Beweis. Man kann ohne Einschränkung $a \neq 0$, $a' \neq 0$ voraussetzen. Dann hat man

$$F = aN\left(x + \frac{b}{a}y\omega\right) \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{ac}{b^2}/\wp,$$

$$F' = a'N\left(x' + \frac{b'}{a'}y'\omega'\right) \quad \text{mit} \quad \omega' = \frac{a'c'}{b'^2}/\wp.$$

Die Notwendigkeit der ersten Bedingung ist klar. Die Notwendigkeit der zweiten Bedingung ergibt sich daraus, daß für äquivalente F und F' die inhomogenen Nullstellen ω und ω' denselben Erweiterungskörper von k erzeugen.

Seien jetzt die beiden Bedingungen erfüllt. Nach der zweiten ist dann

$$\omega' = \omega + \varrho \quad \text{mit} \quad \varrho \text{ in } k$$

und nach der ersten bekanntlich

$$a' = aN(\varkappa + \beta\omega) \quad \text{mit} \quad \varkappa, \beta \text{ in } k.$$

Daraus folgt

$$F' = aN(\varkappa + \beta\omega)\, N\left(x' + \frac{b'}{a'}y'(\omega + \varrho)\right)$$

$$= aN\left[\left(\varkappa x' + \frac{b'}{a'}\left(\frac{ac}{b^2}\beta + \varrho\varkappa\right)y'\right) + \left(\beta x' + \frac{b'}{a'}(\varkappa + \beta + \varrho\beta)y'\right)\omega\right].$$

Hiernach geht F durch die Transformation

$$x = \varkappa x' + \frac{b'}{a'}\left(\frac{ac}{b^2}\beta + \varrho\varkappa\right)y'$$

$$\frac{b}{a}y = \beta x' + \frac{b'}{a'}(\varkappa + (\varrho + 1)\beta)y'$$

in F' über. Damit ist Satz 3 bewiesen. Aus dem Beweis entnimmt man noch:

Zusatz 1. *Ist $a = a'$, so ist für die Äquivalenz die Bedingung $\Delta(F) \equiv \Delta(F')$ mod. $\wp k$ notwendig und hinreichend.*

Zusatz 2. *Für die spezielle Äquivalenz $F \simeq xy$ ist schon die Bedingung $\Delta(F) \equiv 0$ mod. $\wp k$ notwendig und hinreichend, und es ist dann $C(F) \sim 1$.*

Dabei bezeichnet $C(F) \sim 1$ wie üblich, daß $C(F)$ zerfällt.

Satz 4. *Für die Äquivalenz der vollregulären quaternären Formen*

$$F = (a_1x_1^2 + b_1x_1y_1 + c_1y_1^2) + (a_2x_2^2 + b_2x_2y_2 + c_2y_2^2)$$

ist neben der Algebra $C(F)$ auch die Klasse

$$\Delta(F) \equiv \frac{a_1c_1}{b_1^2} + \frac{a_2c_2}{b_2^2} \quad \text{mod. } \wp k$$

eine Invariante.

Beweis. Es sei $\mathfrak{R}$ der zu F gehörige vollreguläre Vektorraum und

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \mathfrak{r}^*$$

seine direkte Zerlegung in zwei vollreguläre Teilräume

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle, \quad \mathfrak{r}^* = \langle \mathfrak{u}_2, \mathfrak{v}_2 \rangle$$

mit

$$|\mathfrak{u}_1|^2 = a_1, \quad \mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1 = b_1, \quad |\mathfrak{v}_1|^2 = c_1; \quad |\mathfrak{u}_2|^2 = a_2, \quad \mathfrak{u}_2\mathfrak{v}_2 = b_2, \quad |\mathfrak{v}_2|^2 = c_2.$$

Wir haben zu zeigen, daß die Klasse $\frac{a_1c_1}{b_1^2}+\frac{a_2c_2}{b_2^2}$ mod. $\wp k$ nur von $\mathfrak{R}$, nicht von der Zerlegung abhängt. Da nach Satz 3 die Klassen $\frac{a_1c_1}{b_1^2}$ mod. $\wp k$ und $\frac{a_2c_2}{b_2^2}$ mod. $\wp k$ nicht von der Wahl der Basen $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{v}_2$ von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}^*$ abhängen, können wir diese Basen zum Beweis in geeigneter Weise festlegen. Es sei nun

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{r}'+\mathfrak{r}'^*$$

eine andere Zerlegung der betrachteten Art, wobei ohne Einschränkung $\mathfrak{r}'$ von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}^*$ verschieden sei. Dann können wir die Basen von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}^*$ so festlegen, daß $\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2$ in $\mathfrak{r}'$ liegt. Setzt man dann

$$(1)\qquad \begin{cases} \bar{\mathfrak{u}}_1=\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2, & \bar{\mathfrak{u}}_2=\mathfrak{u}_2,\\ \bar{\mathfrak{v}}_1=\mathfrak{v}_1, & \bar{\mathfrak{v}}_2=\mathfrak{v}_2+\frac{b_2}{b_1}\mathfrak{v}_1, \end{cases}$$

so erhält man eine weitere Zerlegung

$$\mathfrak{R}=\bar{\mathfrak{r}}+\bar{\mathfrak{r}}^*$$

der betrachteten Art, mit

$$\bar{\mathfrak{r}}=\langle\bar{\mathfrak{u}}_1,\bar{\mathfrak{v}}_1\rangle,\qquad \bar{\mathfrak{r}}^*=\langle\bar{\mathfrak{u}}_2,\bar{\mathfrak{v}}_2\rangle,$$

bei der der Teilraum $\bar{\mathfrak{r}}$ mit $\mathfrak{r}$ noch das Element $\bar{\mathfrak{v}}_1$ und mit $\bar{\mathfrak{r}}'$ schon das Element $\bar{\mathfrak{u}}_1$ gemeinsam hat. Aus (1) folgt

$$\begin{aligned} &\bar{a}_1=|\,\bar{\mathfrak{u}}_1\,|^2=a_1+a_2, && \bar{a}_2=|\,\bar{\mathfrak{u}}_2\,|^2=a_2,\\ &\bar{b}_1=\bar{\mathfrak{u}}_1\bar{\mathfrak{v}}_1=b_1, && \bar{b}_2=\bar{\mathfrak{u}}_2\bar{\mathfrak{v}}_2=b_2,\\ &\bar{c}_1=|\,\bar{\mathfrak{v}}_1\,|^2=c_1, && \bar{c}_2=|\,\bar{\mathfrak{v}}_2\,|^2=c_2+\frac{b_2^2}{b_1^2}c_1. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\bar{a}_1\bar{c}_1}{\bar{b}_1^2}+\frac{\bar{a}_2\bar{c}_2}{\bar{b}_2^2}=\frac{a_1c_1}{b_1^2}+\frac{a_2c_1}{b_1^2}+\frac{a_2c_2}{b_2^2}+\frac{b_2^2}{b_1^2}\frac{a_2c_1}{b_2^2}=\frac{a_1c_1}{b_1^2}+\frac{a_2c_2}{b_2^2},$$

also die Behauptung für den Übergang von $\mathfrak{R}=\mathfrak{r}+\mathfrak{r}^*$ zu $\mathfrak{R}=\bar{\mathfrak{r}}+\bar{\mathfrak{r}}^*$. Ist nun $\mathfrak{r}'$ noch von $\bar{\mathfrak{r}}$ verschieden, so kann man unter Festhaltung des bereits in $\mathfrak{r}'$ gelegenen $\bar{\mathfrak{u}}_1$ die übrigen Basiselemente $\bar{\mathfrak{v}}_1$, $\bar{\mathfrak{u}}_2$, $\bar{\mathfrak{v}}_2$ von $\bar{\mathfrak{r}}$ und $\bar{\mathfrak{r}}^*$ neu so wählen, daß auch $\bar{\mathfrak{v}}_1+\bar{\mathfrak{v}}_2$ in $\mathfrak{r}'$ liegt. Dann erhält man in der Form

$$\begin{aligned} &\mathfrak{u}_1'=\bar{\mathfrak{u}}_1, && \mathfrak{u}_2'=\bar{\mathfrak{u}}_2+\frac{\bar{b}_2}{\bar{b}_1}\bar{\mathfrak{u}}_1,\\ &\mathfrak{v}_1'=\bar{\mathfrak{v}}_1+\bar{\mathfrak{v}}_2, && \mathfrak{v}_1'=\bar{\mathfrak{v}}_2. \end{aligned}$$

Basen von $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}'^*$. Hieraus ergibt sich entsprechend wie vorher die Behauptung für den Übergang von $\mathfrak{R}=\bar{\mathfrak{r}}+\bar{\mathfrak{r}}^*$ zu $\mathfrak{R}=\mathfrak{r}'+\mathfrak{r}'^*$. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Satz 5. *Für die Äquivalenz der allgemeinen vollregulären quadratischen Formen*

$$F\simeq\sum_{i=1}^{n}(a_ix_i^2+b_ix_iy_i+c_iy_i^2)$$

ist neben der Algebra $C(F)$ auch die Klasse

$$\Delta(F)\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ic_i}{b_i^2}\quad\text{mod. }\wp k$$

eine Invariante.

Beweis. Es sei $\mathfrak{R}$ der zu F gehörige vollreguläre Vektorraum und

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle$$

seine direkte Zerlegung in n vollreguläre Teilräume mit

$$| \mathfrak{u}_i |^2 = a_i, \quad \mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_i = b_i, \quad | \mathfrak{v}_i |^2 = c_i.$$

Wir haben zu zeigen, daß die Klasse $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i c_i}{b_i^2}$ mod. $\wp k$ nur von $\mathfrak{R}$, nicht von der Zerlegung abhängt. Für $n = 1, 2$ stimmt das nach Satz 3, 4. Für $n \geqq 3$ verwenden wir vollständige Induktion. Es sei

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathfrak{u}_i', \mathfrak{v}_i' \rangle$$

mit

$$| \mathfrak{u}_i' |^2 = a_i', \quad \mathfrak{u}_i' \mathfrak{v}_i' = b_i', \quad | \mathfrak{v}_i' |^2 = c_i'$$

eine weitere Zerlegung der betrachteten Art. Wir betrachten dann den Teilraum

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{u}_1', \mathfrak{v}_1' \rangle$$

von $\mathfrak{R}$ und haben folgende vier Fälle zu unterscheiden:

a) $\mathfrak{r}$ ist zweidimensional,
b) $\mathfrak{r}$ ist dreidimensional,
c) $\mathfrak{r}$ ist vierdimensional und vollregulär,
d) $\mathfrak{r}$ ist vierdimensional, aber nicht vollregulär.

a) Ist $\mathfrak{r}$ zweidimensional, so ist

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle = \langle \mathfrak{u}_1', \mathfrak{v}_1' \rangle$$

und folglich

$$\mathfrak{r}^* = \sum_{i=2}^{n} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle = \sum_{i=2}^{n} \langle \mathfrak{u}_i', \mathfrak{v}_i' \rangle.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung nach Satz 3 und der Induktionsannahme.

b) Ist $\mathfrak{r}$ dreidimensional, so gibt es in $\mathfrak{r}$ einen von $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1$ linear unabhängigen Vektor $\mathfrak{u}$; dieser kann zu $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1$ senkrecht normiert werden. Man hat dann die direkte Zerlegung

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle + \langle \mathfrak{u} \rangle.$$

Da $\mathfrak{R}$ vollregulär ist, gibt es ferner in $\mathfrak{R}$ einen zu $\mathfrak{u}$ nicht senkrechten Vektor $\mathfrak{v}$; dieser kann ebenfalls zu $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1$ senkrecht normiert werden. Damit ist $\mathfrak{r}$ in einen vollregulären vierdimensionalen Teilraum

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle + \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle$$

von $\mathfrak{R}$ eingebettet. Nach dem Zusatz zu Satz 1 besitzt dieser auch eine direkte Zerlegung

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle \mathfrak{u}_1', \mathfrak{v}_1' \rangle + \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle,$$

wo $\langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle$ ein weiterer vollregulärer Teilraum ist. Da die Summen $\sum_{i=2}^{n} \frac{a_i c_i}{b_i^2}$ mod. $\wp k$ und $\sum_{i=2}^{n} \frac{a_i' c_i'}{b_i'^2}$ mod. $\wp k$ nach der Induktionsannahme nicht von der Basiswahl in $\sum_{i=2}^{n} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle$ und $\sum_{i=2}^{n} \langle \mathfrak{u}_i', \mathfrak{v}_i' \rangle$ abhängen, können wir

Wir haben zu zeigen, daß die Klasse $\frac{a_1c_1}{b_1^2}+\frac{a_2c_2}{b_2^2}$ mod. $\wp k$ nur von $\mathfrak{R}$, nicht von der Zerlegung abhängt. Da nach Satz 3 die Klassen $\frac{a_1c_1}{b_1^2}$ mod. $\wp k$ und $\frac{a_2c_2}{b_2^2}$ mod. $\wp k$ nicht von der Wahl der Basen $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{u}_2, \mathfrak{v}_2$ von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}^*$ abhängen, können wir diese Basen zum Beweis in geeigneter Weise festlegen. Es sei nun

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{r}'+\mathfrak{r}'^*$$

eine andere Zerlegung der betrachteten Art, wobei ohne Einschränkung $\mathfrak{r}'$ von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}^*$ verschieden sei. Dann können wir die Basen von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}^*$ so festlegen, daß $\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2$ in $\mathfrak{r}'$ liegt. Setzt man dann

$$(1)\qquad \begin{cases} \bar{\mathfrak{u}}_1=\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2, & \bar{\mathfrak{u}}_2=\mathfrak{u}_2, \\ \bar{\mathfrak{v}}_1=\mathfrak{v}_1, & \bar{\mathfrak{v}}_2=\mathfrak{v}_2+\frac{b_2}{b_1}\mathfrak{v}_1, \end{cases}$$

so erhält man eine weitere Zerlegung

$$\mathfrak{R}=\bar{\mathfrak{r}}+\bar{\mathfrak{r}}^*$$

der betrachteten Art, mit

$$\bar{\mathfrak{r}}=\langle\bar{\mathfrak{u}}_1,\bar{\mathfrak{v}}_1\rangle, \qquad \bar{\mathfrak{r}}^*=\langle\bar{\mathfrak{u}}_2,\bar{\mathfrak{v}}_2\rangle,$$

bei der der Teilraum $\bar{\mathfrak{r}}$ mit $\mathfrak{r}$ noch das Element $\bar{\mathfrak{v}}_1$ und mit $\bar{\mathfrak{r}}'$ schon das Element $\bar{\mathfrak{u}}_1$ gemeinsam hat. Aus (1) folgt

$$\begin{aligned} \bar{a}_1&=|\,\bar{\mathfrak{u}}_1\,|^2=a_1+a_2, & \bar{a}_2&=|\,\bar{\mathfrak{u}}_2\,|^2=a_2,\\ \bar{b}_1&=\bar{\mathfrak{u}}_1\bar{\mathfrak{v}}_1=b_1, & \bar{b}_2&=\bar{\mathfrak{u}}_2\bar{\mathfrak{v}}_2=b_2,\\ \bar{c}_1&=|\,\bar{\mathfrak{v}}_1\,|^2=c_1, & \bar{c}_2&=|\,\bar{\mathfrak{v}}_2\,|^2=c_2+\frac{b_2^2}{b_1^2}c_1. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\bar{a}_1\bar{c}_1}{\bar{b}_1^2}+\frac{\bar{a}_2\bar{c}_2}{\bar{b}_2^2}=\frac{a_1c_1}{b_1^2}+\frac{a_2c_1}{b_1^2}+\frac{a_2c_2}{b_2^2}+\frac{b_2^2}{b_1^2}\frac{a_2c_1}{b_2^2}=\frac{a_1c_1}{b_1^2}+\frac{a_2c_2}{b_2^2},$$

also die Behauptung für den Übergang von $\mathfrak{R}=\mathfrak{r}+\mathfrak{r}^*$ zu $\mathfrak{R}=\bar{\mathfrak{r}}+\bar{\mathfrak{r}}^*$. Ist nun $\mathfrak{r}'$ noch von $\bar{\mathfrak{r}}$ verschieden, so kann man unter Festhaltung des bereits in $\mathfrak{r}'$ gelegenen $\bar{\mathfrak{u}}_1$ die übrigen Basiselemente $\bar{\mathfrak{v}}_1, \bar{\mathfrak{u}}_2, \bar{\mathfrak{v}}_2$ von $\bar{\mathfrak{r}}$ und $\bar{\mathfrak{r}}^*$ neu so wählen, daß auch $\bar{\mathfrak{v}}_1+\bar{\mathfrak{v}}_2$ in $\mathfrak{r}'$ liegt. Dann erhält man in der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_1'&=\bar{\mathfrak{u}}_1, & \mathfrak{u}_2'&=\bar{\mathfrak{u}}_2+\frac{\bar{b}_2}{\bar{b}_1}\bar{\mathfrak{u}}_1,\\ \mathfrak{v}_1'&=\bar{\mathfrak{v}}_1+\bar{\mathfrak{v}}_2, & \mathfrak{v}_1'&=\bar{\mathfrak{v}}_2. \end{aligned}$$

Basen von $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}'^*$. Hieraus ergibt sich entsprechend wie vorher die Behauptung für den Übergang von $\mathfrak{R}=\bar{\mathfrak{r}}+\bar{\mathfrak{r}}^*$ zu $\mathfrak{R}=\mathfrak{r}'+\mathfrak{r}'^*$. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Satz 5. *Für die Äquivalenz der allgemeinen vollregulären quadratischen Formen*

$$F\simeq\sum_{i=1}^{n}(a_ix_i^2+b_ix_iy_i+c_iy_i^2)$$

ist neben der Algebra $C(F)$ auch die Klasse

$$\Delta(F)\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ic_i}{b_i^2} \quad \text{mod. } \wp k$$

eine Invariante.

Beweis. Es sei $\mathfrak{R}$ der zu F gehörige vollreguläre Vektorraum und

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle$$

seine direkte Zerlegung in n vollreguläre Teilräume mit

$$| \mathfrak{u}_i |^2 = a_i, \quad \mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_i = b_i, \quad | \mathfrak{v}_i |^2 = c_i.$$

Wir haben zu zeigen, daß die Klasse $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i c_i}{b_i^2}$ mod. $\wp k$ nur von $\mathfrak{R}$, nicht von der Zerlegung abhängt. Für $n = 1, 2$ stimmt das nach Satz 3, 4. Für $n \geqq 3$ verwenden wir vollständige Induktion. Es sei

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathfrak{u}_i', \mathfrak{v}_i' \rangle$$

mit

$$| \mathfrak{u}_i' |^2 = a_i', \quad \mathfrak{u}_i' \mathfrak{v}_i' = b_i', \quad | \mathfrak{v}_i' |^2 = c_i'$$

eine weitere Zerlegung der betrachteten Art. Wir betrachten dann den Teilraum

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{u}_1', \mathfrak{v}_1' \rangle$$

von $\mathfrak{R}$ und haben folgende vier Fälle zu unterscheiden:

a) $\mathfrak{r}$ ist zweidimensional,
b) $\mathfrak{r}$ ist dreidimensional,
c) $\mathfrak{r}$ ist vierdimensional und vollregulär,
d) $\mathfrak{r}$ ist vierdimensional, aber nicht vollregulär.

a) Ist $\mathfrak{r}$ zweidimensional, so ist

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle = \langle \mathfrak{u}_1', \mathfrak{v}_1' \rangle$$

und folglich

$$\mathfrak{r}^* = \sum_{i=2}^{n} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle = \sum_{i=2}^{n} \langle \mathfrak{u}_i', \mathfrak{v}_i' \rangle.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung nach Satz 3 und der Induktionsannahme.

b) Ist $\mathfrak{r}$ dreidimensional, so gibt es in $\mathfrak{r}$ einen von $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1$ linear unabhängigen Vektor $\mathfrak{u}$; dieser kann zu $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1$ senkrecht normiert werden. Man hat dann die direkte Zerlegung

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle + \langle \mathfrak{u} \rangle.$$

Da $\mathfrak{R}$ vollregulär ist, gibt es ferner in $\mathfrak{R}$ einen zu $\mathfrak{u}$ nicht senkrechten Vektor $\mathfrak{v}$; dieser kann ebenfalls zu $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1$ senkrecht normiert werden. Damit ist $\mathfrak{r}$ in einen vollregulären vierdimensionalen Teilraum

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle \mathfrak{u}_1, \mathfrak{v}_1 \rangle + \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle$$

von $\mathfrak{R}$ eingebettet. Nach dem Zusatz zu Satz 1 besitzt dieser auch eine direkte Zerlegung

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle \mathfrak{u}_1', \mathfrak{v}_1' \rangle + \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle,$$

wo $\langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle$ ein weiterer vollregulärer Teilraum ist. Da die Summen $\sum_{i=2}^{n} \frac{a_i c_i}{b_i^2}$ mod. $\wp k$ und $\sum_{i=2}^{n} \frac{a_i' c_i'}{b_i'^2}$ mod. $\wp k$ nach der Induktionsannahme nicht von der Basiswahl in $\sum_{i=2}^{n} \langle \mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i \rangle$ und $\sum_{i=2}^{n} \langle \mathfrak{u}_i', \mathfrak{v}_i' \rangle$ abhängen, können wir

$$u_2 = u, \quad v_2 = v \quad \text{und} \quad u_2' = u', \quad v_2' = v'$$

annehmen. Dann ist

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle u_1, v_1\rangle + \langle u_2, v_2\rangle = \langle u_1', v_1'\rangle + \langle u_2', v_2'\rangle$$

und folglich

$$\bar{\mathfrak{r}}^* = \sum_{i=3}^{n} \langle u_i, v_i\rangle = \sum_{i=3}^{n} \langle u_i', v_i'\rangle.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung nach Satz 4 und der Induktionsannahme.

c) Ist $\mathfrak{r}$ vierdimensional und vollregulär, so schließt man wie eben, indem man den Vektor v in $\mathfrak{r}$ wählt; es wird dann $\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}$.

d) Ist $\mathfrak{r}$ vierdimensional, aber nicht vollregulär, so gibt es in $\mathfrak{r}$ einen von u_1, v_1 linear unabhängigen zu u_1, v_1 senkrechten Vektor u, und ferner einen von u_1, v_1, u linear unabhängigen zu u_1, v_1 senkrechten Vektor $\bar{v}$; dieser ist notwendig auch zu u senkrecht, weil $\mathfrak{r}$ nicht vollregulär ist. Man hat dann die direkte Zerlegung

$$\mathfrak{r} = \langle u_1, v_1\rangle + \langle u\rangle + \langle \bar{v}\rangle.$$

Ähnlich wie vorher kann man weiter $\mathfrak{r}$ durch geeignete Wahl zweier Vektoren v und $\bar{u}$ aus $\mathfrak{R}$ in einen vollregulären sechsdimensionalen Teilraum

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle u_1, v_1\rangle + \langle u, v\rangle + \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle$$

von $\mathfrak{R}$ einbetten. Für die Vektoren u_1', v_1' aus $\mathfrak{r}$ bestehen Darstellungen

$$u_1' = \alpha_1 u_1 + \beta_1 v_1 + \alpha u + \beta \bar{v}$$
$$v_1' = \gamma_1 u_1 + \delta_1 v_1 + \gamma u + \delta \bar{v}.$$

Dabei ist $\alpha_1\delta_1 + \beta_1\gamma_1 \neq 0$, weil $u_1'v_1' \neq 0$ ist, und $\alpha\delta + \beta\gamma \neq 0$, weil $\mathfrak{r} = \langle u_1, v_1, u_1', v_1'\rangle$ vierdimensional ist. Man kann daher u_1, v_1 und $u, \bar{v}$ so gewählt annehmen, daß einfacher

$$u_1' = u_1 + u, \quad v_1' = v_1 + \bar{v} \tag{2}$$

gilt. Setzt man ferner

$$\begin{cases} u' = u, & v' = v + \dfrac{uv}{b_1} v_1, \\ \bar{u}' = \bar{u} + \dfrac{\bar{u}\bar{v}}{b_1} (u_1 + u), & \bar{v}' = \bar{v}, \end{cases} \tag{3}$$

so erhält man für $\bar{\mathfrak{r}}$ die weitere direkte Zerlegung

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle u_1', v_1'\rangle + \langle u', v'\rangle + \langle \bar{u}_1', \bar{v}'\rangle$$

in vollreguläre Teilräume. Auf Grund der Induktionsannahme können wir

$$\begin{cases} u_2 = u, \quad v_2 = v; \quad u_3 = \bar{u}, \quad v_3 = \bar{v} \\ u_2' = u', \quad v_2' = v'; \quad u_3' = \bar{u}', \quad v_3' = \bar{v}' \end{cases} \tag{4}$$

annehmen. Dann ist

$$\mathfrak{r} = \sum_{i=1}^{3} \langle u_i, v_i\rangle = \sum_{i=1}^{3} \langle u_i', v_i'\rangle$$

und folglich

$$\bar{\mathfrak{r}}^* = \sum_{i=4}^{n} \langle u_i, v_i\rangle = \sum_{i=4}^{n} \langle u_i', v_i'\rangle.$$

Da auf die letztere Beziehung wieder die Induktionsannahme anwendbar ist, genügt es aus der ersteren die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{a_i c_i}{b_i^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{a_i' c_i'}{b_i'^2}$$

zu folgern. Nach (2), (3), (4) ist nun

$$\frac{a_1' c_1'}{b_1'^2} = \frac{(a_1 + a_2)(c_1 + c_3)}{b_1^2} = \frac{a_1 c_1}{b_1^2} + \frac{a_2 c_1}{b_1^2} + \frac{a_1 c_3}{b_1^2} + \frac{a_2 c_3}{b_1^2}$$

$$\frac{a_2' c_2'}{b_2'^2} = \frac{a_2\left(c_2 + \dfrac{b_2^2}{b_1^2} c_1\right)}{b_2^2} = \frac{a_2 c_2}{b_2^2} + \frac{a_2 c_1}{b_1^2}$$

$$\frac{a_3' c_3'}{b_3'^2} = \frac{\left(a_3 + \dfrac{b_3^2}{b_1^2}(a_1 + a_2)\right) c_3}{b_3^2} = \frac{a_3 c_3}{b_3^2} + \frac{a_1 c_3}{b_1^2} + \frac{a_2 c_3}{b_1^2},$$

woraus die behauptete Beziehung ersichtlich ist. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Satz 6. *Wenn die (reguläre) Form F die Null darstellt, so ist sie in die Gestalt $xy + f$ transformierbar. Dabei ist die Form f durch F bis auf äquivalente eindeutig bestimmt.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es in dem zu F gehörigen Vektorraum $\mathfrak{R}$ einen Vektor $\mathfrak{u} \neq 0$ mit $|\mathfrak{u}|^2 = 0$. Wegen der Regularität von $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{u}$ nicht in $\mathfrak{R}^*$ enthalten. Daher gibt es in $\mathfrak{R}$ einen Vektor $\mathfrak{v}_0$ mit $\mathfrak{u}\mathfrak{v}_0 = 1$. Dann hat das Vektorpaar $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + |\mathfrak{v}_0|^2 \mathfrak{u}$ die Eigenschaften

$$|\mathfrak{u}|^2 = 0, \quad \mathfrak{u}\mathfrak{v} = 1, \quad |\mathfrak{v}|^2 = 0.$$

Der nach Satz 1 bestehenden direkten Zerlegung

$$\mathfrak{R} = \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle + \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle^*$$

entsprechend hat man dann

$$F = xy + f,$$

wobei f einer Basis von $\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle^*$ entspricht.

Es sei nun

$$\mathfrak{R} = \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle + \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle^*$$

eine weitere direkte Zerlegung mit

$$|\mathfrak{u}'|^2 = 0, \quad \mathfrak{u}'\mathfrak{v}' = 1, \quad |\mathfrak{v}'|^2 = 0$$

und entsprechend

$$F \cong x'y' + f',$$

wobei f' einer Basis von $\langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle^*$ entspricht. Wir haben zu zeigen, daß dann $f \cong f'$ oder also $\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle^* \cong \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle^*$ gilt. Dazu betrachten wir den Teilraum

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle$$

von $\mathfrak{R}$.

Ist $\langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle$ in $\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle + \mathfrak{R}^*$ enthalten, so hat man

$$\mathfrak{u}' = \alpha\mathfrak{u} + \beta\mathfrak{v} + \mathfrak{w}$$

$$\mathfrak{v}' = \gamma\mathfrak{u} + \delta\mathfrak{v} + \mathfrak{z}$$

mit $\mathfrak{w}, \mathfrak{z}$ aus $\mathfrak{R}$. Dabei ist $1 = \mathfrak{u}'\mathfrak{v}' = (\alpha\delta + \beta\gamma)\mathfrak{u}\mathfrak{v} = \alpha\delta + \beta\gamma$. Daher ist dann auch $\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle$ in $\langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle + \mathfrak{R}^*$ enthalten. Somit ist in diesem Falle

$$\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle + \mathfrak{R}^* = \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle + \mathfrak{R}^*.$$

Daraus folgt aber sogar $\langle u, v\rangle^* = \langle u', v'\rangle^*$.

Wir können demgemäß weiterhin voraussetzen, daß $\mathfrak{r}$ nicht in $\langle u, v\rangle + \mathfrak{R}^*$ enthalten ist, und haben dann folgende vier Fälle zu unterscheiden:

a) $\mathfrak{r}$ ist dreidimensional,
b) $\mathfrak{r}$ ist vierdimensional und vollregulär,
c) $\mathfrak{r}$ ist vierdimensional, nicht vollregulär und nicht fremd zu $\mathfrak{R}^*$,
d) $\mathfrak{r}$ ist vierdimensional, nicht vollregulär, aber fremd zu $\mathfrak{R}^*$.

a) Wenn $\mathfrak{r}$ dreidimensional ist, so ist

$$\mathfrak{r} = \langle u, v\rangle + \langle \bar{u}\rangle$$

mit nicht zu $\mathfrak{R}^*$ gehörigen $\bar{u}$, und man kann $\mathfrak{r}$ wie im Falle b) des vorigen Beweises in einen vollregulären vierdimensionalen Teilraum

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle u, v\rangle + \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle$$

von $\mathfrak{R}$ einbetten. Nach dem Zusatz zu Satz 1 hat man dann auch

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle u', v'\rangle + \langle \bar{u}', \bar{v}'\rangle$$

mit einem weiteren vollregulären Teilraum $\langle \bar{u}', \bar{v}'\rangle$. Daraus folgt

$$\langle u, v\rangle^* = \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle + \bar{\mathfrak{r}}^*, \quad \langle u', v'\rangle^* = \langle \bar{u}', \bar{v}'\rangle + \bar{\mathfrak{r}}^*,$$

so daß es genügt, $\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle \cong \langle \bar{u}', \bar{v}'\rangle$ zu beweisen. Es ist das die Behauptung des Satzes für die $\bar{\mathfrak{r}}$ entsprechenden vollregulären quaternären Formen

$$\Phi = xy + \varphi, \quad \Phi' = x'y' + \varphi',$$

wo φ, φ' den Teilräumen $\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle$, $\langle \bar{u}', \bar{v}'\rangle$ entsprechen. Nun ist

$$C(\Phi) = C(xy)C(\varphi) \sim C(\varphi), \qquad C(\Phi') = C(x'y')C(\varphi') \sim C(\varphi')$$
$$\Delta(\Phi) \equiv \Delta(xy) + \Delta(\varphi) \equiv \Delta(\varphi), \quad \Delta(\Phi') \equiv \Delta(x'y') + \Delta(\varphi') \equiv \Delta(\varphi') \mod \wp k.$$

Da $\Phi \simeq \Phi'$ ist, folgt hieraus nach Satz 4 und Satz 3 auch $\varphi \simeq \varphi'$, also $\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle \cong \langle \bar{u}', \bar{v}'\rangle$.

b) Wenn $\mathfrak{r}$ vierdimensional und vollregulär ist, so schließt man wie eben, mit $\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}$.

c) Wenn $\mathfrak{r}$ vierdimensional, nicht vollregulär und nicht fremd zu $\mathfrak{R}^*$ ist, so ist

$$\mathfrak{r} = \langle u, v\rangle + \langle \bar{u}\rangle + \langle w\rangle$$

mit nicht zu $\mathfrak{R}^*$ gehörigem $\bar{u}$ und zu $\mathfrak{R}^*$ gehörigem w, und man kann $\mathfrak{r}$ in einen fünfdimensionalen Teilraum

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle u, v\rangle + \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle + \langle w\rangle$$

von $\mathfrak{R}$ mit vollregulärem $\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle$ einbetten. Nach dem Zusatz zu Satz 1 hat man dann auch

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle u', v'\rangle + \langle \bar{u}', \bar{v}'\rangle + \langle w\rangle$$

mit einem weiteren vollregulären Teilraum $\langle \bar{u}', \bar{v}'\rangle$ (wobei aber nur $\langle \bar{u}', \bar{v}'\rangle + \langle w\rangle$ eindeutig festliegt). Daraus folgt wieder

$$\langle u, v\rangle^* = \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle + \bar{\mathfrak{r}}^*, \quad \langle u', v'\rangle^* = \langle \bar{u}', \bar{v}'\rangle + \bar{\mathfrak{r}}^*,$$

so daß es genügt, $\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle \simeq \langle \bar{u}', \bar{v}'\rangle$ zu beweisen (bei geeigneter Festlegung von $\langle \bar{u}', \bar{v}'\rangle$). Sei dazu

$$|\bar{u}|^2 = \bar{a}, \quad \bar{u}\bar{v} = \bar{b}, \quad |\bar{v}|^2 = \bar{c}, \quad |w|^2 = d.$$

Da $\langle u', v'\rangle$ in $\mathfrak{r} = \langle u, v\rangle + \langle \bar{u}\rangle + \langle w\rangle$ enthalten und vollregulär ist, gilt

$$\langle u', v'\rangle = \langle u + \alpha\bar{u} + \beta w,\ v + \gamma\bar{u} + \delta w\rangle.$$

Weil $\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle$ vierdimensional ist, ist dabei $\alpha\delta + \beta\gamma \neq 0$. Daher sind α, γ nicht beide Null. Ist etwa $\gamma \neq 0$, so kann man das Basiselement $\bar{\mathfrak{u}}$ durch $\gamma\bar{\mathfrak{u}} + \delta\mathfrak{w}$ ersetzen, oder also $\gamma = 1$, $\delta = 0$ annehmen:

$$\langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle = \langle \mathfrak{u} + \alpha\bar{\mathfrak{u}} + \beta\mathfrak{w},\ \mathfrak{v} + \bar{\mathfrak{u}} \rangle.$$

Nach Satz 3 ist dann

$$(\bar{a}\alpha^2 + d\beta^2)\bar{a} \equiv 0 \mod \wp k,$$

oder also wegen $\bar{a}^2\alpha^2 \equiv \bar{a}\,\bar{\alpha}$ mod. $\wp k$

$$\bar{a}(\alpha + d\beta^2) \equiv 0 \mod \wp k. \tag{5}$$

Ersichtlich kann nun

$$\bar{\mathfrak{u}}' = \bar{\mathfrak{u}}, \quad \bar{\mathfrak{v}}' = \bar{\mathfrak{v}} + \bar{b}(\mathfrak{u} + \alpha\mathfrak{v} + \beta\mathfrak{w})$$

gewählt werden (wobei das an sich entbehrliche Glied $\beta\mathfrak{w}$ mit Rücksicht auf unseren Zweck hinzugefügt ist). Dann ist

$$|\,\bar{\mathfrak{u}}'\,|^2 = \bar{a}, \quad \bar{\mathfrak{u}}'\bar{\mathfrak{v}}' = \bar{b}, \quad |\,\bar{\mathfrak{v}}'\,|^2 = \bar{c} + \bar{b}^2(\alpha + d\beta^2).$$

Wegen (5) folgt hieraus $\dfrac{\bar{a}'\bar{c}'}{\bar{b}'^2} \equiv \dfrac{\bar{a}\bar{c}}{\bar{b}^2}$ mod. $\wp k$, und daher nach dem Zusatz 1 zu Satz 3 die Behauptung $\langle \bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}} \rangle \simeq \langle \bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}' \rangle$.

d) Wenn $\mathfrak{r}$ vierdimensional, nicht vollregulär, aber fremd zu $\mathfrak{R}^*$ ist, so ist wie im Falle d) des vorigen Beweises

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle + \langle \bar{\mathfrak{u}} \rangle + \langle \bar{\mathfrak{v}} \rangle$$

mit nicht zu $\mathfrak{R}^*$ gehörigen $\bar{\mathfrak{u}}$, $\bar{\mathfrak{v}}$, und man kann $\mathfrak{r}$ in einen vollregulären sechsdimensionalen Teilraum

$$\mathfrak{r} = \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle + \langle \bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}} \rangle + \langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}, \bar{\bar{\mathfrak{v}}} \rangle$$

von $\mathfrak{R}$ einbetten. Nach dem Zusatz zu Satz 1 hat man dann auch

$$\bar{\mathfrak{r}} = \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle + \langle \bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}' \rangle + \langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}', \bar{\bar{\mathfrak{v}}}' \rangle$$

mit weiteren vollregulären Teilräumen $\langle \bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}' \rangle$, $\langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}', \bar{\bar{\mathfrak{v}}}' \rangle$ (von denen nur die Summe eindeutig festliegt). Daraus folgt

$$\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \rangle^* = \langle \bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}} \rangle + \langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}, \bar{\bar{\mathfrak{v}}} \rangle + \bar{\mathfrak{r}}^*, \quad \langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle^* = \langle \bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}' \rangle + \langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}', \bar{\bar{\mathfrak{v}}}' \rangle + \bar{\mathfrak{r}}^*,$$

so daß es genügt, $\langle \bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}} \rangle \simeq \langle \bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}' \rangle$, $\langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}, \bar{\bar{\mathfrak{v}}} \rangle \simeq \langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}', \bar{\bar{\mathfrak{v}}}' \rangle$ zu beweisen (bei geeigneter Festlegung von $\langle \bar{\mathfrak{u}}', \bar{\mathfrak{v}}' \rangle$, $\langle \bar{\bar{\mathfrak{u}}}', \bar{\bar{\mathfrak{v}}} \rangle$). Sei dazu

$$|\,\bar{\mathfrak{u}}\,|^2 = \bar{a}, \quad \bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}} = \bar{b}, \quad |\,\bar{\mathfrak{v}}\,|^2 = \bar{c}$$
$$|\,\bar{\bar{\mathfrak{u}}}\,|^2 = \bar{\bar{a}}, \quad \bar{\bar{\mathfrak{u}}}\bar{\bar{\mathfrak{v}}} = \bar{\bar{b}}, \quad |\,\bar{\bar{\mathfrak{v}}}\,|^2 = \bar{\bar{c}}.$$

Wie im vorigen Falle kann man wieder

$$\langle \mathfrak{u}', \mathfrak{v}' \rangle = \langle \mathfrak{u} + \alpha\bar{\mathfrak{u}} + \beta\bar{\bar{\mathfrak{v}}},\ \mathfrak{v} + \bar{\mathfrak{u}} \rangle$$

annehmen, so daß analog zu (5) die Beziehung

$$\bar{a}(\alpha + \bar{\bar{c}}\beta^2) \equiv 0 \mod \wp k \tag{5'}$$

besteht. Ersichtlich kann nun

$$\bar{\mathfrak{u}}' = \bar{\mathfrak{u}}, \qquad \bar{\mathfrak{v}}' = \bar{\mathfrak{v}} + \bar{b}(\mathfrak{u} + \alpha\mathfrak{v} + \beta\bar{\bar{\mathfrak{v}}}),$$
$$\bar{\bar{\mathfrak{u}}}' = \bar{\bar{\mathfrak{u}}} + \bar{\bar{b}}\beta\mathfrak{v}, \qquad \bar{\bar{\mathfrak{v}}}' = \bar{\bar{\mathfrak{v}}}$$

gewählt werden. Dann ist

$$|\bar{u}'|^2 = \bar{a}, \quad \bar{u}'\bar{v}' = \bar{b}, \quad |\bar{v}'|^2 = \bar{c} + \bar{b}^2(\alpha + \bar{\bar{c}}\beta^2)$$
$$|\bar{\bar{u}}'|^2 = \bar{\bar{a}}, \quad \bar{\bar{u}}'\bar{\bar{v}}' = \bar{\bar{b}}, \quad |\bar{\bar{v}}'|^2 = \bar{\bar{c}}.$$

Wegen (5′) folgen hieraus nach dem Zusatz 1 zu Satz 3 die Behauptungen

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \simeq \langle \bar{u}', \bar{v}' \rangle, \quad \langle \bar{\bar{u}}, \bar{\bar{v}} \rangle \simeq \langle \bar{\bar{u}}', \bar{\bar{v}}' \rangle.$$

Damit ist Satz 6 bewiesen.

Folgerung. *Ist φ vollregulär und $\varphi + f \simeq \varphi + f'$,* so ist $f \simeq f'$.

Beweis. Durch Transformation von φ auf Quasidiagonalform kommt man auf den Fall zurück, daß φ eine vollreguläre binäre Form ist. Wir bilden die vollreguläre quaternäre Form $\varphi + \varphi$. Sie stellt die Null dar, indem man den Variablen in den beiden Summanden gleiche Werte gibt. Nach Satz 6 ist also

$$\varphi + \varphi \simeq xy + \psi,$$

wobei die binäre Form ψ wieder vollregulär ist. Nun ist

$$\Delta(\varphi + \varphi) \equiv \Delta(\varphi) + \Delta(\varphi) \equiv 0 \mod \wp k$$

und nach Satz 4

$$\Delta(\varphi + \varphi) \equiv \Delta(xy) + \Delta(\psi) \equiv \Delta(\psi) \mod \wp k,$$

also $\Delta(\psi) \equiv 0 \mod \wp k$. Nach dem Zusatz 2 zu Satz 3 folgt daraus $\psi \simeq x'y'$. Wir haben damit die Regel

$$\varphi + \varphi \simeq xy + x'y'. \tag{6}$$

Aus der Voraussetzung $\varphi + f \simeq \varphi + f'$ folgt nun $\varphi + \varphi + f \simeq \varphi + \varphi + f'$, also $xy + x'y' + f \simeq xy + x'y' + f'$. Daraus folgt durch zweimalige Anwendung von Satz 6 die Behauptung $f \simeq f'$.

Durch wiederholte Anwendung von Satz 6 ergibt sich, daß jede quadratische Form F in die Gestalt $\sum_i x_i y_i + f$ transformierbar ist, wo f eine die Null nicht darstellende Form ist. Dabei ist f durch F bis auf äquivalente eindeutig bestimmt. Wir nennen f wie in W. Q. die Grundform von F, und nennen zwei Formen F und F' ähnlich, in Zeichen $F \sim F'$, wenn sie äquivalente Grundformen haben. Diese Beziehung ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Ist $F_1 \sim F_1'$ und $F_2 \sim F_2'$, so ist $F_1 + F_2 \sim F_1' + F_2'$. Ähnliche Formen haben insbesondere äquivalente quasilineare Teile.

Satz 7. *Sind F und F' ähnlich, so sind die quasilinearen Teile von F und F' zur Grundform von $F + F'$ äquivalent, und umgekehrt.*

Beweis. Wir können beim Beweis beider Behauptungen voraussetzen, daß die quasilinearen Teile von F und F' übereinstimmen. Sei

$$F^* = \sum_j d_j z_j^2$$

dieser gemeinsame quasilineare Teil von F und F'. Ist nun $F \sim F'$, so hat man

$$F \sim \varphi + F^*, \quad F' \sim \varphi + F^*$$

mit einer vollregulären Form φ. Nach (6) ist

$$\varphi + \varphi \sim 0.$$

Ferner ist

$$F^* + F^* = \sum_j d_j z_j^2 + \sum_j d_j z_j'^2 = \sum_j d_j (z_j + z_j')^2 \cong \sum_j d_j \bar{z}_j^2 \simeq F^*$$

(in dem Sinne, daß auf eine reguläre Form reduziert wird). Daraus folgt

$$F + F' \sim (\varphi + \varphi) + (F^* + F^*) \sim F^*.$$

Insbesondere gilt hiernach stets

$$F + F \sim F^*.$$

Ist nun umgekehrt

$$F \sim \varphi + F^*, \quad F' \sim \varphi' + F^*$$

mit vollregulären φ, φ', und ist dabei $F + F' \sim F^*$, so folgt vermöge der Regel

$$F^* + F^* \sim F^*$$

die Behauptung:

$$F \simeq F + F^* \sim F + (F + F') = (F + F) + F' \sim F^* + F' \simeq F'.$$

Satz 8. *Es sei F^* der quasilineare Teil von F, also*

$$F \simeq f + F^*$$

mit vollregulärem f, und es sei $d \neq 0$ irgendein durch F^* darstellbares Element aus k. Dann ist die Algebra

$$C_0(dF) = C(df) \cdot k(\sqrt{F^*})$$

eine Invariante der Form F.

Ist F eine ternäre nicht quasilineare Form, also

$$F \sim f + dz^2 = (ax^2 + bxy + cy^2) + dz^2,$$

so bilden dk^2 und $C_0(dF) = C(df)$ ein vollständiges Invariantensystem für die Äquivalenz.

Beweis. Zum Beweis der ersten Behauptung genügt es zu zeigen, daß die Algebra $C(dF)$ nicht von der Wahl des durch F^* darstellbaren Elements $d \neq 0$ abhängt; dann gilt ja dasselbe auch für die Restklassenalgebra $C_0(dF)$ nach ihrem Radikal. Da nun d das Quadrat eines regulären Elements w aus dem Zentrum $C(F^*)$ von $C(F)$ ist, folgt in der Tat $C(dF) \simeq wC(F) = C(F)$.

Zum Beweis der zweiten Behauptung sei u, v das Erzeugendensystem von $C(df)$ mit

$$u^2 = da, \quad uv + vu = db, \quad v^2 = dc.$$

Dann ist

$$dF \simeq df + z^2 = (xu + yv + z)^2.$$

Nun ist das Quadrat des allgemeinen Elements aus $C(df)$:

$$(tuv + xu + yv + z)^2 = dbt(tuv + xu + yv) + (df + z^2 + d^2act^2).$$

Es reduziert sich dann und nur dann auf ein Element aus k, wenn $t = 0$ ist. Daher hat $xu + yv + z$ eine invariante Bedeutung für $C(df)$; es ist das allgemeine Element aus $C(df)$ mit Quadrat in k. Hiernach ist die Form $df + z^2 \simeq dF$ und damit die Form F selbst invariant durch dk^2 und $C(df)$ bestimmt.

Satz 9. *Damit eine ternäre nicht quasilineare Form*

$$F \simeq f + dz^2 = (ax^2 + bxy + cy^2) + dz^2$$

die Null darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß die Algebra $C_0(dF) = C(df)$ zerfällt. Damit eine quaternäre nicht quasilineare und nicht vollreguläre Form

$$F \simeq f + dz^2 + d'z'^2 = (ax^2 + bxy + cy^2) + dz^2 + d'z'^2$$

die Null darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß die Algebra $C_0(dF) = C(df) \cdot k(\sqrt{dd'})$ zerfällt.

Beweis. Stellt F, also auch dF die Null dar, so gilt nach Satz 6

$$dF \simeq xy + z^2 \quad \text{bzw.} \quad xy + z^2 + dd'z'^2,$$

also

$$C_0(dF) \simeq C(xy) \quad \text{bzw.} \quad C(xy) \cdot k(\sqrt{dd'}).$$

Da $C(xy)$ zerfällt, ergibt sich die behauptete Zerfallsbedingung.

Ist umgekehrt diese Zerfallsbedingung erfüllt, also $C_0(dF)$ isomorph zur zweireihigen vollen Matrixalgebra über k bzw. $k(\sqrt{dd'})$, so gibt es in $C_0(dF)$ ein von Null verschiedenes Element mit dem Quadrat Null. Dieses Element hat nach dem vorigen Beweis die Form

$$xu + yv + z \quad \text{bzw.} \quad (x_1 + x_2\sqrt{dd'})u + (y_1 + y_2\sqrt{dd'})v + (z_1 + z_2\sqrt{dd'}),$$

wobei die Elemente x, y bzw. x_1, x_2, y_1, y_2 aus k nicht sämtlich Null sind. Im ternären Falle hat man dann die Nulldarstellung

$$d(ax^2 + bxy + cy^2) + z^2 = 0$$

durch die Form $df + z^2 \simeq dF$. Im quaternären Falle hat man zunächst

$$d[a(x_1^2 + dd'x_2^2) + b((x_1x_2 + dd'y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{dd'}) + c(y_1^2 + dd'y_2^2)] + z_1^2 + dd'z_2'^2 = 0,$$

Aus Rationalitätsgründen ist dabei $x_1y_2 + x_2y_1 = 0$, so daß man setzen kann:

$$x_1 = \lambda_1 x, \quad x_2 = \lambda_2 x,$$
$$y_1 = \lambda_1 y, \quad y_2 = \lambda_2 y,$$

wobei λ_1, λ_2 und x, y je nicht beide Null sind. Dividiert man dann das zugrundeliegende Element aus $C_0(dF)$ durch $\lambda_1 + \lambda_2\sqrt{dd'}$, so geht es in die Form $xu + yv + z + z'\sqrt{dd'}$ über, und man hat die Nulldarstellung

$$d(ax^2 + bxy + cy^2) + z^2 + dd'z'^2 = 0$$

durch die Form $df + z^2 + dd'z'^2 \simeq dF$.

Satz 10. *Damit eine quaternäre vollreguläre Form F die Null darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß die Algebra $C(F)$ im Körper $k(\Delta(F)/\wp)$ zerfällt.*

Beweis. Stellt F die Null dar, so gilt nach Satz 6

$$F = xy + f$$

mit einer vollregulären binären Form f, also

$$C(F) \sim C(xy)C(f) \sim C(f)$$

und

$$\Delta(F) \equiv \Delta(xy) + \Delta(f) \equiv \Delta(f) \mod \wp k.$$

Da $C(f)$ in $k(\Delta(f)/\wp)$ zerfällt, ergibt sich die behauptete Zerfallsbedingung.

Sei umgekehrt diese Zerfallsbedingung erfüllt. Wir setzen an:

$$F \simeq f_1 + f_2$$

mit vollregulären binären Formen

$$f_1 = a_1x_1^2 + b_1x_1y_1 + c_1y_1^2 = a_1N\left(x_1 + \frac{b_1}{a_1}y_1\omega_1\right) \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \frac{a_1c_1}{b_1^2}/\wp,$$

$$f_2 = a_2x_2^2 + b_2x_2y_2 + c_2y_2^2 = a_2N\left(x_2 + \frac{b_2}{a_2}y_2\omega_2\right) \quad \text{mit} \quad \omega_2 = \frac{a_2c_2}{b_2^2}/\wp.$$

Wir brauchen nur den Fall zu betrachten, daß nicht schon f_1 oder f_2 die Null darstellt. Dann sind $a_1, a_2 \neq 0$, und nach dem Zusatz 2 zu Satz 3 sind

$$K_1 = k(\omega_1) = k(\Delta(f_1)/\wp),$$
$$K_2 = k(\omega_2) = k(\Delta(f_2)/\wp)$$

separable quadratische Körper über k. Sei ferner

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

also

$$K = k(\omega) = k(\Delta(F)/\wp).$$

Die vorausgesetzte Zerfallsbedingung besagt, daß die Algebra $C(F) \simeq C(f_1)C(f_2)$ im Körper K zerfällt:

$$C(F)_K \simeq C(f_1)_K \cdot C(f_2)_K \sim 1.$$

Da die normalen einfachen Algebren vom Grade 2 den Exponenten 2 haben, kann dies auch dahin ausgesprochen werden, daß die Algebren $C(f_1)$ und $C(f_2)$ durch Erweiterung auf K isomorph werden:

$$C(f_1)_K \simeq C(f_2)_K.$$

Da für ihre Zerfällungskörper K_1 und K_2 jedenfalls

$$KK_1 = KK_2$$

gilt, drückt sich dies durch eine Relation

$$a_2 = a_1 N(\xi + \eta\omega_1) \quad \text{mit} \quad \xi, \eta \text{ in } K$$

aus. Liegen ξ, η sogar in k — das ist sicher der Fall, wenn $K = k$, also $K_1 = K_2$ ist —, so hat man hiernach die Nulldarstellung

$$x_1 = \xi, \quad y_1 = \frac{a_1}{b_1}\eta, \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 0$$

durch $f_1 + f_2 \simeq F$. Liegen ξ, η nicht in k — dann ist K quadratisch über k und $KK_1 = KK_2$ quadratisch über K —, so seien

$$\xi' = \xi + p_1, \quad \eta' = \eta + q_1 \quad \text{mit} \quad p_1, q_1 \text{ in } k$$

die Konjugierten zu ξ, η in K. Da $N\left(\frac{\xi' + \eta'\omega_1}{\xi + \eta\omega_1}\right) = 1$ ist, gibt es bekanntlich ein Element $\mu + \nu\omega_1$ mit μ, ν aus K derart, daß

$$\frac{\xi' + \eta'\omega_1}{\xi + \eta\omega_1} = \frac{\mu + \nu(\omega_1 + 1)}{\mu + \nu\omega_1}$$

also

$$\frac{p_1 + q_1\omega_1}{\xi + \eta\omega_1} = \frac{\nu}{\mu + \nu\omega_1} = \frac{1}{\alpha + \omega_1}$$

ist, wo auch $\alpha = \frac{\mu}{\nu}$ in K liegt. Dies α liegt nicht schon in k, weil ξ, η nicht in k liegen sollten; dagegen liegt $N(\alpha + \omega_1) = \wp\alpha + \wp\omega_1$ in k, weil $N(\xi + \eta\omega_1)$ in k liegt. Daher ist notwendig

$$\alpha = r + \omega, \quad \text{also} \quad \alpha + \omega_1 = r + \omega_2 \quad \text{mit} \quad r \text{ in } k.$$

Zusammengenommen folgt so:

$$\xi + \eta\omega_1 = (p_1 + q_1\omega_1)(r + \omega_2) = \frac{p_1 + q_1\omega_1}{p_2 + q_2\omega_2} \quad \text{mit} \quad p_2, q_2 \text{ in } k,$$

und demgemäß

$$a_2 N(p_2 + q_2\omega_2) = a_1 N(p_1 + q_1\omega_1).$$

Daraus ergibt sich die Nulldarstellung

$$x_1 = p_1, \quad y_1 = \frac{a_1}{b_1} q_1, \quad x_2 = p_2, \quad y_2 = \frac{a_2}{b_2} q_2$$

durch $f_1 + f_2 \simeq F$. Damit ist Satz 10 bewiesen.

Satz 11. *Wird über den Körper k die Voraussetzung gemacht, daß die Ähnlichkeitsklassen der normalen einfachen Algebren vom Grade 2 über k eine Gruppe bilden, so ist die Grundform jeder vollregulären Form höchstens quaternär, und für eine nicht vollreguläre Form ist der vollreguläre Teil der Grundform höchstens binär.*

Mit anderen Worten: Unter der angegebenen Voraussetzung über k stellt jede Form F von einem der beiden Typen

$$F \simeq f_1 + f_2 + f_3, \quad F \simeq f_1 + f_2 + dz^2,$$

wo f_1, f_2, f_3 vollreguläre binäre Formen sind, die Null dar.

Beweis. Indem man in f_3 eine der beiden Variablen gleich Null setzt, wird die Behauptung für den ersten Typus auf die Behauptung für den zweiten Typus zurückgeführt. Durch Division mit d kommt man dann auf den Nachweis zurück, daß jede Form vom Typus

$$(7) \quad F \simeq f_1 + f_2 + z^2 = (a_1 x_1^2 + b_1 x_1 y_1 + c_1 y_1^2) + (a_2 x_2^2 + b_2 x_2 y_2 + c_2 y_2^2) + z^2$$

die Null darstellt.

Nach der Voraussetzung über k ist $C(f_1 + f_2) = C(f_1)C(f_2)$ ähnlich zu einer normalen einfachen Algebra vom Grade 2. Wir können annehmen, daß $C(f_1)$, $C(f_2)$ und $C(f_1 + f_2)$ nicht zerfallen, weil sonst nach Satz 9 bzw. nach Satz 10 schon $f_1 + z^2$ oder $f_2 + z^2$ oder $f_1 + f_2$ die Null darstellt. Dann sind die minimalen Zerfällungskörper von $C(f_1)$, $C(f_2)$ und $C(f_1 + f_2)$ quadratisch. Sind K_1, K_2 untereinander verschiedene minimale separable Zerfällungskörper von $C(f_1)$, $C(f_2)$, so ist der biquadratische Körper K_1K_2 Zerfällungskörper von $C(f_1 + f_2)$, so daß notwendig einer seiner drei quadratischen Teilkörper K_1, K_2, K Zerfällungskörper von $C(f_1 + f_2)$ ist. Entweder können nun K_1, K_2 so gewählt werden, daß weder $C(f_2)$ von K_1 noch $C(f_1)$ von K_2 zerfällt wird; dann wird $C(f_1 + f_2)$ weder von K_1 noch von K_2, also von K zerfällt. Oder aber es sind die minimalen separablen Zerfällungskörper einer der beiden Algebren $C(f_1)$, $C(f_2)$ — sie sei mit $C(f)$ bezeichnet — sämtlich auch Zerfällungskörper der anderen und daher auch von $C(f_1 + f_2)$. Wir zeigen, daß man in diesem Falle ein Zerfällungskörperpaar K_1, K_2 von $C(f)$ so wählen kann, daß der dritte quadratische Teilkörper K von K_1K_2 wieder Zerfällungskörper von $C(f)$ ist.

Sei dazu u, v mit

$$u^2 = a, \quad uv + vu = b, \quad v^2 = c$$

das Erzeugendensystem von $C(f)$ mit

$$f = (xu + yv)^2.$$

Wie man aus der entsprechenden Formel im Beweis von Satz 8 entnimmt, gilt dann für das allgemeine Element aus $C(f)$ die Formel

$$\wp(tuv + xu + yv + z) = \wp(bt)\frac{uv}{b} + (bt - 1)(xu + yv) + (f + \wp z + act^2).$$

Diese Bildung reduziert sich dann und nur dann auf ein Element aus k, wenn $bt = 1$ ist, und dann gilt

$$\wp\left(\frac{uv}{b} + xu + yv + z\right) = f + \frac{ac}{b^2} + \wp z.$$

Hiernach ist der allgemeine minimale separable Zerfällungskörper von $C(f)$ gegeben durch

$$K = k(\delta/\wp) \quad \text{mit} \quad \delta = (ax^2 + bxy + cy^2) + \frac{ac}{b^2} + \wp z,$$

wo x, y, z beliebige Elemente aus k sind. Für zwei solche Zerfällungskörper

$$K_1 = k(\delta_1/\wp) \quad \text{mit} \quad \delta_1 = (ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2) + \frac{ac}{b^2} + \wp z_1,$$

$$K_2 = k(\delta_2/\wp) \quad \text{mit} \quad \delta_2 = (ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2) + \frac{ac}{b^2} + \wp z_2$$

ist nun der dritte quadratische Teilkörper von K_1K_2 gegeben durch $K = k((\delta_1 + \delta_2)/\wp)$ mit

$$\delta_1 + \delta_2 = (a(x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + c(y_1 + y_2)^2) + b(x_1y_2 + x_2y_1) + \wp(z_1 + z_2).$$

Wählt man also x_1, y_1, x_2, y_2 aus k so, daß

$$b(x_1y_2 + x_2y_1) = \frac{ac}{b^2}$$

wird, so ist auch K Zerfällungskörper von $C(f)$.

Wir können demnach in jedem Falle zwei minimale separable Zerfällungskörper

$$K_1 = k(\delta_1/\wp), \quad K_2 = k(\delta_2/\wp)$$

von $C(f_1), C(f_2)$ so wählen, daß

$$K = k((\delta_1 + \delta_2)/\wp)$$

Zerfällungskörper von $C(f_1 + f_2)$ ist. Seien dann

$$C(f_1) = k(\omega_1, \theta_1) \quad \text{mit} \quad \wp\omega_1 = \delta_1, \quad \theta_1\omega_1\theta_1^{-1} = \omega_1 + 1, \quad \theta_1^2 = \alpha_1,$$

$$C(f_2) = k(\omega_2, \theta_2) \quad \text{mit} \quad \wp\omega_2 = \delta_2, \quad \theta_2\omega_2\theta_2^{-1} = \omega_2 + 1, \quad \theta_2^2 = \alpha_2$$

die zugehörigen verschränkten Produktdarstellungen. Ihnen entsprechen die vollregulären binären Formen

$$\varphi_1 = \alpha_1 N(\xi_1 + \eta_1\omega_1) = \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_1\xi_1\eta_1 + \alpha_1\delta_1\eta_1^2,$$

$$\varphi_2 = \alpha_2 N(\xi_2 + \eta_2\omega_2) = \alpha_2\xi_2^2 + \alpha_2\xi_2\eta_2 + \alpha_2\delta_2\eta_2^2.$$

Für diese gilt nach Konstruktion

$$C(\varphi_1) \simeq C(f_1), \qquad C(\varphi_2) \simeq C(f_2),$$

$$\Delta(\varphi_1) \equiv \delta_1, \qquad \Delta(\varphi_2) \equiv \delta_2 \mod \wp k,$$

und daher

$$C(\varphi_1 + \varphi_2) \simeq C(f_1 + f_2),$$

$$\Delta(\varphi_1 + \varphi_2) \equiv \delta_1 + \delta_2 \mod \wp k.$$

Hieraus folgt einerseits nach Satz 8

$$\varphi_1 + \zeta_1^2 \simeq f_1 + z_1^2, \quad \varphi_2 + \zeta_2^2 \simeq f_2 + z_2^2$$

und daraus

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \zeta^2 \simeq f_1 + f_2 + z^2,$$

während andrerseits das Zerfallen von $C(f_1 + f_2)$ in $K = k((\delta_1 + \delta_2)/\wp)$ das Zerfallen von $C(\varphi_1 + \varphi_2)$ in $k(\Delta(\varphi_1 + \varphi_2)/\wp)$ bedeutet, so daß $\varphi_1 + \varphi_2$ nach Satz 10 die Null darstellt. Zusammengenommen ergibt sich daraus, daß $f_1 + f_2 + z^2$ die Null darstellt, wie behauptet.

Satz 12. *Wird über den Körper k die Voraussetzung gemacht, daß jede Form vom Typus (7) in k die Null darstellt, so bilden die Variablenanzahl $m = 2n$, die Algebra $C(F)$ und die Klasse $\Delta(F)$ ein volles Invariantensystem für die Äquivalenz der vollregulären quadratischen Formen F.*

Für $n = 1$ ist die Voraussetzung über k entbehrlich.

Beweis. Da unter der über k gemachten Voraussetzung nach dem Beweis von Satz 11 jede vollreguläre Form F einer vollregulären quaternären Form ähnlich ist, und da die Ähnlichkeitsklasse von $C(F)$ und die Klasse $\Delta(F)$ Ähnlichkeitsinvarianten von F sind, genügt es zu zeigen, daß zwei vollreguläre quaternäre Formen F_1, F_2 mit

$$C(F_1) \simeq C(F_2),$$
$$\Delta(F_1) \equiv \Delta(F_2) \mod \wp k$$

äquivalent sind. Sei dazu F eine zu $F_1 + F_2$ ähnliche vollreguläre quaternäre Form:

$$F \sim F_1 + F_2.$$

Dann ist

$$C(F) \sim C(F_1) \cdot C(F_2) \sim 1,$$
$$\Delta(F) \equiv \Delta(F_1) + \Delta(F_2) \equiv 0 \mod \wp k.$$

Wegen der ersten Beziehung stellt F nach Satz 10 die Null dar. Nach Satz 6 ist also $F \sim f$, wo f eine vollreguläre binäre Form ist. Wegen der zweiten Beziehung ist dabei $\Delta(f) \equiv 0 \mod \wp k$; nach dem Zusatz 2 zu Satz 3 ist daher

$$F \sim 0.$$

Nach Satz 7 folgt daraus $F_1 \sim F_2$, also $F_1 \simeq F_2$, wie behauptet.

Satz 13. *Für $n = 1$ treten genau diejenigen Zusammenstellungen $C(F)$ und $\Delta(F)$ als Invarianten auf, für die $C(F)$ in $k(\Delta(F)/\wp)$ zerfällt.*

Für $n > 1$ treten — wenn die Ähnlichkeitsklassen der normalen einfachen Algebren vom Grade 2 über k eine Gruppe bilden — alle Zusammenstellungen $C(F)$ und $\Delta(F)$ als Invarianten auf.

Beweis. Die erste Behauptung ergibt sich, indem man zu einer verschränkten Produktdarstellung von $C(F)$ mit dem Zerfällungskörper $k(\Delta(F)/\wp)$ wie im Beweis von Satz 11 die Normform bildet.

Um die zweite Behauptung zu beweisen, wähle man eine binäre Form f_1 mit $C(f_1) \simeq C(F)$ und eine binäre Form f_2 mit $C(f_2) \sim 1$ und $\Delta(f_1) + \Delta(f_2) \equiv \Delta(F) \mod \wp k$. Dann leistet eine zu $f_1 + f_2$ ähnliche Form von $2n$ Variablen das Verlangte.

Zum Abschluß machen wir noch einige Bemerkungen.

Bemerkung 1. Wenn k vollkommen ist, so zerfallen alle normalen einfachen Algebren vom Grade 2 über k, und die quasilinearen Teile reduzieren sich auf 0 oder z^2. Danach folgt aus den Sätzen 9, 10, daß jede quadratische Form entweder zu einer vollregulären binären Form oder zu z^2 ähnlich ist.

Bemerkung 2. Wenn k den Unvollkommenheitsgrad $[k : k^2] = 2$ hat, also z. B. wenn k ein algebraischer Funktionenkörper oder ein Potenzreihenkörper einer Unbestimmten t über einem vollkommenen Konstantenkörper Ω ist, so reduzieren sich die quasilinearen Teile auf einen der vier Typen $0, z^2, tz^2, z_0^2 + tz_1^2$, wo t ein nicht zu k^2 gehöriges Element aus k ist. Ferner bilden in diesem Falle die Ähnlichkeitsklassen der normalen einfachen Algebren vom Grade 2 über k, wie leicht zu sehen, eine Gruppe. Für $[k : k^2] = 2$ ergibt sich demnach aus den Sätzen 9, 10, 11, 12 folgendes:

Für vollreguläre F bilden $m = 2n$, $C(F), \Delta(F)$ ein vollständiges Invariantensystem.

Für F mit quasilinearem Teil dz^2 ($d = 1$ oder t) ist $F \sim f + dz^2$ mit vollregulärem binärem f, und es bilden $m = 2n + 1$, d und $C_0(dF) \sim C(df)$ ein vollständiges Invariantensystem.

Für F mit quasilinearem Teil $z_0^2 + tz_1^2$ ist $F \sim z_0^2 + tz_1^2$, und es bildet $m = 2n + 2$ ein vollständiges Invariantensystem.

Zu der letzten Aussage beachte man, daß $k(\sqrt{t}) = k^{1/2}$, als der einzige inseparable quadratische Erweiterungskörper von k, jede normale einfache Algebra $C(f)$ vom Grade 2 zerfällt, woraus dann die Behauptung nach dem zweiten Teil von Satz 9 folgt.

Eingegangen 25. Januar 1940.

Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie. I.

Mittlere Ordnung.

Von *Alfred Stöhr* in Berlin.

---

§ 1.

Kleine lateinische Buchstaben bedeuten nichtnegative ganze Zahlen, kleine griechische Buchstaben nichtnegative reelle Zahlen. Große lateinische Buchstaben bedeuten Mengen natürlicher Zahlen; $M(x)$ bedeutet die Anzahl der Zahlen $\leqq x$ aus M.

A sei gegeben. Falls m Summe von Zahlen aus A ist, bedeute $l(m)$ die kleinste Zahl, für die es eine Darstellung von m als Summe von $l(m)$ Zahlen aus A gibt. $l(m)$ ist dann und nur dann für jedes $m \geqq 1$ definiert, wenn $1 \in A$ gilt, was im folgenden vorausgesetzt sei. Wo es zur Unterscheidung erforderlich ist (§ 5), nehme ich die Menge A in die Bezeichnung auf und schreibe $l_A(m)$ statt $l(m)$. Stets ist

$$l(m) \geqq 1. \tag{1}$$

Falls

$$h_A = \operatorname*{Max}_{m=1,2,\ldots} l(m) \tag{2}$$

existiert, heißt h_A die Ordnung [1]) von A; sie ist die kleinste Zahl h mit der Eigenschaft, daß hA (d. h. die Schnirelmannsche Summe [1]) von h Summanden A) die Menge aller natürlichen Zahlen ist.

Über „wesentliche Komponenten“ [1]) [2]) sind mehrere Arbeiten [3]) erschienen; die bisher schärfsten Ergebnisse sind:

Sei λ eine Zahl mit

$$\sum_{m=1}^{x} l(m) \leqq \lambda x \quad \text{für alle} \quad x \geqq 1, \tag{3}$$

B eine beliebige weitere Zahlmenge mit der Dichte [1]) β. Die Summe von A und B habe die Dichte γ. Dann ist [4])

$$\gamma \geqq \beta\left(1 + \frac{1-\beta}{2\lambda}\right) \tag{4}$$

und (schärfer, aber komplizierter bewiesen) [5])

---

[1]) Die Definitionen der hier benutzten Begriffe sind zusammengestellt im Bericht von H. Rohrbach, Jber. DMV. **48** (1939), 199—236. Mit „Dichte“ ist stets die Schnirelmannsche Dichte (nicht die natürliche Dichte) gemeint.

[2]) A. Khintchine, Rec. math. Moscou **40** (1933), 180—189.

[3]) Eine Übersicht gibt Rohrbach a. a. O.[1]).

[4]) P. Erdös, Acta arithm. **1** (1936), 197—200; E. Landau, Cambridge Tract **35** (1937), 60—63.

[5]) A. Brauer, Math. Zeitschr. **44** (1938), 212—232.

$$\gamma \geqq \beta\left(1 + \frac{1 - \sqrt{\beta}}{\lambda}\right). \tag{5}$$

Die Bedingung (3) legt es nahe, die Größe

$$\lambda_A = \overline{\operatorname{fin}}_{x=1,2,\ldots} \frac{1}{x} \sum_{m=1}^{x}{}' l(m) \tag{6}$$

einzuführen, falls die obere Grenze auf der rechten Seite von (6) existiert; ich nenne λ_A wegen der Analogie zu (2) die *mittlere Ordnung* von A. Wegen (1) ist

$$\lambda_A \geqq 1. \tag{7}$$

λ_A ist die kleinste Zahl λ, die (3) erfüllt; (4) und (5) ergeben ihre schärfsten Aussagen mit $\lambda = \lambda_A$.

§ 2.

Wir wollen zunächst h_A und λ_A durcheinander abschätzen. Aus den Definitionen folgt unmittelbar: Wenn h_A existiert, so existiert auch λ_A, und es ist

$$\lambda_A \leqq h_A. \tag{8}$$

Umgekehrt beweise ich

Satz 1. *Wenn λ_A existiert, so existiert auch h_A, und es ist*

$$h_A < 2\lambda_A. \tag{9}$$

Durch Beispiele werde ich ferner zeigen (§ 4), daß sich (8) und (9), als Abschätzungen von λ_A bei gegebenem h_A betrachtet, für keinen Wert von $h_A \geqq 2$ ohne weitere Voraussetzungen verbessern lassen.

Der Fall $h_A = 1$ erledigt sich so: *Die Aussagen $h_A = 1$ und $\lambda_A = 1$ sind äquivalent.* Denn beide sind äquivalent mit $l(m) = 1$ für alle $m \geqq 1$.

Erdös [4]) bewies

$$\gamma \geqq \beta\left(1 + \frac{1 - \beta}{2h_A}\right); \tag{10}$$

das bedeutet, daß alle Zahlmengen A von endlicher Ordnung (d. h. mit existierendem h_A) wesentliche Komponenten sind. Landau [4]) gab dem Satz die Fassung (4). Diese Abschätzung ist im allgemeinen besser [6]) als (10). Aus der Existenzaussage von Satz 1 folgt jedoch, daß auch durch (4) *keine anderen Zahlmengen als die von endlicher Ordnung* als wesentliche Komponenten erkannt werden.

Dem Beweis von Satz 1 schicke ich einige Hilfssätze voraus.

$A_n(x)$ sei die Anzahl der m mit $1 \leqq m \leqq x$, $l(m) \leqq n$; anders ausgedrückt: $A_n(x) = (nA)(x)$ für $n > 0$, $A_0(x) = 0$.

Hilfssatz 1. *Sei $l \geqq 1$, $x \geqq 1$, $l(x) \geqq l$ (mit anderen Worten: Ist $l > 1$, so liege x nicht in $(l-1)A$). Dann ist*

$$\sum_{n=0}^{l-1} A_n(x) < \frac{l}{2}\, x \tag{11}$$

und sogar

$$\sum_{n=0}^{l-1} A_n(x) \leqq \frac{l}{2}\,(x-1). \tag{12}$$

---

[6]) Ein Beispiel dafür gibt Landau [4]): Für die Menge Q der positiven Quadratzahlen ist $h_Q = 4$, $\lambda_Q \leqq \frac{19}{6}$.

Beweis. Für $0 \leqq n \leqq l-1$ ist

$$A_n(x-1) + A_{l-n-1}(x-1) \leqq x-1, \tag{13}$$

denn es gibt $A_n(x-1)$ Zahlen m mit $1 \leqq m \leqq x-1$, $l(m) \leqq n$ und $A_{l-n-1}(x-1)$ Zahlen m mit $1 \leqq m \leqq x-1$, $l(x-m) \leqq l-n-1$. Wäre nun

$$A_n(x-1) + A_{l-n-1}(x-1) > x-1,$$

so gäbe es (Schubfachschluß [7])) ein y mit $l(y) \leqq n$, $l(x-y) \leqq l-n-1$. Dies y wäre mit höchstens n, $x-y$ mit höchstens $l-n-1$, mithin x mit höchstens $l-1$ Summanden aus A darstellbar, was $l(x) \geqq l$ widerspricht. (13) ist damit bewiesen; summiert man (13) über n von 0 bis $l-1$ und dividiert durch 2, so erhält man

$$\sum_{n=0}^{l-1} A_n(x-1) \leqq \frac{l}{2}(x-1).$$

Da x nicht in $(l-1)A$ liegt, ist $A_n(x-1) = A_n(x)$ für $1 \leqq n \leqq l-1$, womit (12) bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Sei $l \geqq 1$, $x \geqq 1$, $l(m) \leqq l$ für $1 \leqq m \leqq x$. Dann ist*

$$\sum_{m=1}^{x} l(m) = l \cdot x - \sum_{n=0}^{l-1} A_n(x).$$

Beweis. Für $n \geqq 1$ ist $A_n(x) - A_{n-1}(x)$ die Anzahl der m mit $1 \leqq m \leqq x$, $l(m) = n$; also ist wegen $1 \leqq l(m) \leqq l$

$$\sum_{m=1}^{x} l(m) = \sum_{n=1}^{l} (A_n(x) - A_{n-1}(x))\, n.$$

Die rechte Seite ist (sog. partielle Summation) gleich

$$l \cdot A_l(x) - \sum_{n=0}^{l-1} A_n(x),$$

und wegen $A_l(x) = x$ folgt die Behauptung.

Hilfssatz 3. *Sei $x \geqq 1$, $l(m) \leqq l(x)$ für $1 \leqq m \leqq x$. Dann ist*

$$\sum_{m=1}^{x} l(m) > \frac{l(x)}{2}\, x.$$

Beweis. Folgt aus den Hilfssätzen 1 und 2 mit $l = l(x)$.

Beweis von Satz 1. Sei $y \geqq 1$. Wir bestimmen dazu $x \geqq 1$ als die (sicher vorhandene) kleinste Zahl mit $l(x) \geqq l(y)$. Dann ist $l(m) \leqq l(x)$ für $1 \leqq m \leqq x$. Also ist nach Definition von λ_A bzw. nach Hilfssatz 3

$$\lambda_A x \geqq \sum_{m=1}^{x} l(m) > \frac{l(x)}{2}\, x \geqq \frac{l(y)}{2}\, x,$$

d. h. $l(y) < 2\lambda_A$ für alle $y \geqq 1$. Nach Definition (2) existiert daher h_A, und es ist $h_A < 2\lambda_A$.

Es sei angemerkt, daß sich die bloße Existenz von h_A bei existierendem λ_A kürzer wie folgt beweisen läßt:

Für jedes $x \geqq 1$ ist

$$\lambda_A x \geqq \sum_{m=1}^{x} l(m) \geqq 2\lambda_A(x - A_{[2\lambda_A]}(x)). \tag{14}$$

Denn die linke Ungleichung folgt aus der Definition von λ_A; die rechte ergibt sich, wenn man $l(m)$ für $l(m) \leqq 2\lambda_A$ durch 0 und für $l(m) > 2\lambda_A$ durch $2\lambda_A$ ersetzt. Aus (14) folgt

---

[7]) Einen entsprechenden Schubfachschluß benutzten L. Schnirelmann, Math. Ann. **107** (1933), 649—690, und I. Schur, Sitzber. Preuß. Akad. Wiss. 1936, 269—297.

$$A_{[2\lambda_A]}(x) \geqq \frac{1}{2}\, x \quad \text{für jedes} \quad x \geqq 1$$

$\left(\text{mit anderen Worten: } [2\lambda_A]A \text{ hat mindestens die Dichte } \frac{1}{2}\right)$, und deshalb ist nach einem bekannten Satz [8]) $2([2\lambda_A]\, A) = (2[2\lambda_A])\, A$ die Menge aller natürlichen Zahlen; also $h_A \leqq 2[2\lambda_A]$.

§ 3.

Die Dichte von nA $(n \geqq 1)$ sei α_n; α_0 bedeute 0.

Ich zeige, wie sich (8) und (9) unter Heranziehung der α_n bisweilen verschärfen lassen.

Satz 2. *h_A existiere; es sei $l \geqq h_A$. Dann ist*

$$\lambda_A \leqq l - \sum_{n=1}^{l-1} \alpha_n. \tag{15}$$

Vorbemerkung. Die rechte Seite hängt von l nicht ab, denn für $n \geqq h_A$ ist $\alpha_n = 1$.

Beweis. Sei $x \geqq 1$. Beachtet man $A_0(x) = 0$ und $A_n(x) \geqq \alpha_n x$, so erhält man aus Hilfssatz 2

$$\sum_{m=1}^{x} l(m) \leqq l \cdot x - \sum_{n=1}^{l-1} \alpha_n x,$$

$$\frac{1}{x} \sum_{m=1}^{x} l(m) \leqq l - \sum_{n=1}^{l-1} \alpha_n.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Satz 3. *h_A existiere; es sei $l \geqq h_A$ und*

$$\operatorname*{fin}_{x=1,2,\ldots} \frac{\sum_{n=1}^{l-1} A_n(x)}{x} = \sum_{n=1}^{l-1} \operatorname*{fin}_{x=1,2,\ldots} \frac{A_n(x)}{x}. \tag{16}$$

Dann ist

$$\lambda_A = l - \sum_{n=1}^{l-1} \alpha_n. \tag{17}$$

Vorbemerkungen. 1) Wegen $A_n(x) = x$, $\alpha_n = 1$ für $n \geqq h_A$ hängt weder die Gültigkeit von (16) noch die rechte Seite von (17) von der Wahl von l ab. — 2) Die rechte Seite von (16) ist $\sum_{n=1}^{l-1} \alpha_n$. — 3) Mit dem Zeichen $\geqq$ statt $=$ ist (16) trivial.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen (16) und Vorbemerkung 2) gibt es ein $x \geqq 1$ mit

$$\frac{\sum_{n=1}^{l-1} A_n(x)}{x} < \sum_{n=1}^{l-1} \alpha_n + \varepsilon.$$

Aus Hilfssatz 2 folgt dann

$$\lambda_A \geqq \frac{1}{x} \sum_{m=1}^{x} l(m) = l - \frac{\sum_{n=1}^{l-1} A_n(x)}{x} > l - \sum_{n=1}^{l-1} \alpha_n - \varepsilon$$

und, da $\varepsilon > 0$ beliebig wählbar ist,

$$\lambda_A \geqq l - \sum_{n=1}^{l-1} \alpha_n.$$

---

[8]) L. Schnirelmann a. a. O.[7]); vgl. auch H. Rohrbach a. a. O.[1]), S. 206.

Zusammen mit Satz 2 folgt die Behauptung.

Ich möchte die Frage aufwerfen, ob (16) für *jedes* A erfüllt ist; mir ist kein Gegenbeispiel bekannt.

Folgende Abschätzung von λ_A nach unten benutzt die Voraussetzung (16) nicht:

Satz 4. *h_A existiere, dann ist*

$$\lambda_A \geqq h_A - (h_A - 1)\,\alpha_{h_A-1}. \tag{18}$$

Beweis. Für $h_A = 1$ ist $\lambda_A = 1$; wir dürfen daher $h_A \geqq 2$ annehmen. Sei $\varepsilon > 0$. Für ein geeignetes $x \geqq 1$ ist

$$A_{h_A-1}(x) \leqq (\alpha_{h_A-1} + \varepsilon)\,x.$$

Ferner ist

$$\sum_{m=1}^{x} l(m) \geqq h_A(x - A_{h_A-1}(x)) + 1 \cdot A_{h_A-1}(x) = h_A x - (h_A - 1)(A_{h_A-1}(x))$$

(ich ersetzte $l(m)$ für $l(m) < h_A$ durch 1). Man erhält daher

$$\lambda_A x \geqq \sum_{m=1}^{x} l(m) \geqq h_A x - (h_A - 1)(\alpha_{h_A-1} + \varepsilon)\,x,$$

$$\lambda_A \geqq h_A - (h_A - 1)(\alpha_{h_A-1} + \varepsilon),$$

und da die linke Seite von ε frei ist, folgt (18).

Satz 5. *Dann und nur dann ist $\lambda_A = h_A$, wenn $\alpha_{h_A-1} = 0$ ist.*

Beweis. Der Fall $h_A = 1$ ist trivial. Für $h_A \geqq 2$ folgt der erste Teil der Behauptung aus (8) und (18), der zweite aus (15) mit $l = h_A$.

Es sei eine Menge A vorgelegt, von der lediglich für irgendein festes n (oder auch für mehrere n) eine Abschätzung $\alpha_n \geqq \eta_n$ mit $0 < \eta_n < 1$ bekannt sei. Wir stellen das Problem, die Größe λ_A mittels n und η_n nach oben abzuschätzen. Man kann dabei Abschätzungen für die Dichte der Summe von Mengen positiver Dichte [3]), ferner die in § 1 zitierten Ergebnisse und unseren Satz 2 heranziehen. Da die gegenwärtig bekannten Abschätzungen ein schlecht übersehbares Bild ergeben, behandle ich das Problem nicht allgemein, sondern betrachte nur als Beispiel einen Spezialfall.

Sei etwa $\alpha_2 \geqq 0{,}48$. Aus $0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \leqq \cdots$ und einem Satz von Khintchine [9]) folgt $\alpha_1 \geqq 0$, $\alpha_2 \geqq 0{,}48$, $\alpha_3 \geqq 0{,}48$, $\alpha_4 \geqq 0{,}96$, $\alpha_5 \geqq 0{,}96$, $\alpha_6 = 1$. Also ist $h_A \geqq 6$; nach Satz 2 folgt weiter $\lambda_A \leqq 6 - \sum_{n=1}^{5} \alpha_n \leqq 3{,}12$. Die Abschätzung (5) mit $\lambda = 3{,}12$ liefert, da

$$\xi\left(1 + \frac{1 - \sqrt{\xi}}{\lambda}\right)$$

für $0 \leqq \xi \leqq 1$, $\lambda \geqq 1$ eine monoton wachsende Funktion von ξ ist,

$$\alpha_3 \geqq \alpha_2\left(1 + \frac{1 - \sqrt{\alpha_2}}{\lambda}\right) \geqq 0{,}48\left(1 + \frac{1 - \sqrt{0{,}48}}{3{,}12}\right) > 0{,}527.$$

Es ist also $\alpha_2 + \alpha_3 > 1$ und daher [8]) $2A + 3A = 5A$ die Menge aller natürlichen Zahlen und $\alpha_5 = 1$. Wir haben also — was nicht unmittelbar ersichtlich war — das Nebenergebnis $h_A \leqq 5$ gewonnen. Die Abschätzung von λ_A läßt sich unter Benutzung der verbesserten Abschätzung von α_3 nun weiter verbessern; wir gehen gleich noch etwas weiter: Aus $\alpha_1 \geqq 0$, $\alpha_2 \geqq 0{,}48$,

---

[9]) A. Khintchine, Rec. math. Moscou **39** (1932), Heft 3, 27—34.

$$\alpha_3 \geqq 0{,}48\left(1 + \frac{1 - \sqrt{0{,}48}}{\lambda_A}\right),$$

$\alpha_4 \geqq 0{,}96$, $\alpha_5 = 1$ folgt nach Satz 2

$$\lambda_A \leqq 5 - \left(0 + 0{,}48 + 0{,}48\left(1 + \frac{1 - \sqrt{0{,}48}}{\lambda_A}\right) + 0{,}96\right),$$

$$\lambda_A \leqq \lambda_0,$$

wo λ_0 die größte Wurzel der Gleichung

$$\lambda = 5 - \left(0{,}48 + 0{,}48\left(1 + \frac{1 - \sqrt{0{,}48}}{\lambda}\right) + 0{,}96\right)$$

ist ($\lambda_0 < 3{,}032$); dies ist die schärfste mit den gegenwärtigen Hilfsmitteln erreichbare Abschätzung.

§ 4.

Ich gebe nun die in § 2 angekündigten Beispiele.

1. *Beispiel.* $h \geqq 1$ sei vorgegeben. Um zu zeigen, daß sich (8) bei gegebenem h_A nicht ohne Zusatzvoraussetzungen verbessern läßt, ist ein A mit $\lambda_A = h_A = h$ anzugeben. $\lambda_A = h_A = 1$ ist erfüllt, wenn A die Menge aller natürlichen Zahlen ist. Sei also $h \geqq 2$. Nach Satz 5 genügt es, $h_A = h$, $\alpha_{h-1} = 0$ zu erfüllen. Das ist aber möglich. Denn zu jedem vorgegebenen $h \geqq 2$ gibt es [10]) Mengen A mit $h_A = h$ und

$$A(x) = O\left(x^{\frac{1}{h}}\right) \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

Für diese A ist aber $\alpha_{h-1} = 0$, sogar

$$A_{h-1}(x) = O\left(x^{\frac{h-1}{h}}\right) \quad \text{für} \quad x \to \infty,$$

denn $A_{h-1}(x)$ ist höchstens gleich der Anzahl der Kombinationen (mit Wiederholung) von Zahlen $\leqq x$ aus A unter Hinzunahme der Null.

2. *Beispiel.* Ein anderes A konstruieren wir wie folgt: $h \geqq 2$ sei vorgegeben, $r \geqq 1$ beliebig. A bestehe aus allen und nur den natürlichen Zahlen, die einer Zahl s mit $1 \leqq s \leqq r \pmod{(h-1)r+1}$ kongruent sind. Man ermittelt leicht

$$\alpha_n = \frac{nr}{(h-1)r+1} \qquad \text{für} \quad 1 \leqq n < h,$$

$\alpha_h = 1$. Also ist $h_A = h$, und nach Satz 2 ist

$$\lambda_A \leqq h\left(1 - \frac{1}{2 + \frac{2}{r(h-1)}}\right).$$

Da r beliebig groß sein darf, kann λ_A beliebig nahe an $\frac{h}{2}$ liegen, womit gezeigt ist, daß (9) bei gegebenem $h_A \geqq 2$ ohne Zusatzvoraussetzungen nicht verbessert werden kann.

§ 5.

Wir untersuchen noch kurz das Verhalten der mittleren Ordnung bei Addition von Mengen. Sind $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ Mengen natürlicher Zahlen, die beide die Eins enthalten, so ist

---

[10]) D. Raikov, Rec. math. Moscou (N. S.) **2** (1937), 596—597; A. Stöhr, Math. Zeitschr. **42** (1937), 739—743.

$$1 \leqq l_{A^{(1)}+A^{(2)}}(m) \leqq \min\left(l_{A^{(1)}}(m),\ l_{A^{(2)}}(m)\right)$$

für jedes $m \geqq 1$, also

$$1 \leqq \lambda_{A^{(1)}+A^{(2)}} \leqq \min\left(\lambda_{A^{(1)}},\ \lambda_{A^{(2)}}\right). \tag{19}$$

Mehr als (19) läßt sich bei einer Summe qA von lauter gleichen Summanden A beweisen.

$[\xi]^+$ bezeichne die ganze Zahl mit $\xi \leqq [\xi]^+ < \xi + 1$ (also $[\xi]^+ = -[-\xi]$).

Für $q \geqq 1$ ist

$$l_{qA}(m) = \left[\frac{1}{q}\, l_A(m)\right]^+, \tag{20}$$

was sich aus den Definitionen von $l_A(m)$, $l_{qA}(m)$ unmittelbar ergibt.

Satz 6. *Sei $q \geqq 1$; λ_A existiere. Dann ist*

$$\lambda_{qA} \geqq \frac{1}{q}\, \lambda_A, \tag{21}$$

$$\lambda_{qA} \leqq \frac{1}{q}\, \lambda_A + \frac{q-1}{q}. \tag{22}$$

Beweis. Wegen (20) ist

$$\frac{1}{x} \sum_{m=1}^{x} l_{qA}(m) \geqq \frac{1}{x} \sum_{m=1}^{x} \frac{1}{q}\, l_A(m) = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x} \sum_{m=1}^{x} l_A(m)$$

und

$$\frac{1}{x} \sum_{m=1}^{x} l_{qA}(m) \leqq \frac{1}{x} \sum_{m=1}^{x} \left(\frac{1}{q}\, l_A(m) + \frac{q-1}{q}\right) = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x} \sum_{m=1}^{x} l_A(m) + \frac{q-1}{q},$$

woraus die Behauptung folgt.

Das die Ordnung betreffende Analogon zu (21), (22) ist trivial und lautet

$$h_{qA} = \left[\frac{1}{q}\, h_A\right]^+.$$

Aus $\lambda_A = h_A$ folgt $\lambda_{qA} = h_{qA}$. Denn aus $\lambda_A = h_A$ folgt nach Satz 5, daß die Dichte von $(h_A - 1)A$ Null ist. Dann ist die Dichte von $(h_{qA} - 1)qA$ wegen

$$(h_{qA} - 1)q = q\left[\frac{1}{q}\, h_A\right]^+ - q \leqq h_A - 1$$

a fortiori Null, und die Behauptung folgt aus Satz 5. Für $\lambda_A = h_A = rq$ (das gibt es für $rq \geqq 1$ nach dem ersten Beispiel von § 4) ist daher

$$\lambda_{qA} = h_{qA} = \frac{1}{q}\, \lambda_A,$$

und für $\lambda_A = h_A = rq + 1$ ist

$$\lambda_{qA} = h_{qA} = \frac{1}{q}\, \lambda_A + \frac{q-1}{q},$$

mit anderen Worten: Die Abschätzungen (21) bzw. (22) lassen sich für die genannten Werte von λ_A ohne Zusatzvoraussetzungen nicht verbessern.

Eingegangen 14. Mai 1940.

Über ein zweidimensionales Analogon einer Formel der Integralrechnung.

Von *Werner Schmeidler* in Berlin.

Die bekannte Formel der Integralrechnung

$$(1) \qquad \int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi}{\cos\varphi - \cos\psi}\, d\varphi = \frac{\pi \sin n\psi}{\sin\psi} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

deren Anwendung vor allem in der Tragflügeltheorie von grundlegender Bedeutung ist, soll im folgenden auf Doppelintegrale über einen elliptischen Grundbereich ausgedehnt werden. Wie am Schluß dieser Note kurz angedeutet wird, kann mit Hilfe der gewonnenen Formel z. B. eine bei der Berechnung der räumlichen Potentialströmung um eine gewölbte Fläche von elliptischem Umriß auftretende Integrodifferentialgleichung in einfacher Weise gelöst werden.

Vermöge der Substitution $x = -\cos\varphi$, $\xi = -\cos\psi$ kann man (1) in der Form

$$-\int_{-1}^{+1} \frac{\cos[n \arccos(-x)]}{x - \xi} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi \sin n\psi}{\sin\psi}$$

oder auch

$$-\int_{-1}^{+1} \frac{d}{dx}(\sin[n \arccos(-x)]) \frac{dx}{x - \xi} = \frac{\pi n \sin n\psi}{\sin\psi}$$

schreiben. Setzt man ferner

$$\sin[(n+1)\arccos(-x)] = \sqrt{1 - x^2}\, P_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

so wird das Polynom

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1)}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \sqrt{1 - x^2}^{-1} \frac{d^n}{dx^n}(1 - x^2)^{n + \frac{1}{2}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ein Gegenbauersches Polynom $P_n(x, \alpha)$ mit $\alpha = \frac{1}{2}$; es bestehen die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\, P_m(x) \sqrt{1 - x^2}\, dx = 0 \qquad (n \neq m).$$

Demnach ergibt sich für (1) die Schreibweise [1])

$$(2) \qquad -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{d}{dx}(\sqrt{1 - x^2}\, P_n(x)) \frac{dx}{x - \xi} = (n+1)\, P_n(\xi),$$

[1]) Das Integral ist wie die früheren als Cauchyscher Hauptwert oder durch

$$-\frac{1}{\pi} \lim_{\zeta \to 0} \int_{-1}^{+1} \frac{d}{dx}(\sqrt{1 - x^2}\, P_n(x)) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + \zeta^2}\, dx$$

definiert.

zu der wir im folgenden ein zweidimensionales Analogon aufstellen wollen. (Vgl. die Formel (13) des Textes.)

Wir knüpfen zu diesem Zweck an die von Koschmieder [2]) gegebene Erweiterung der Gegenbauerschen Polynome auf ein Biorthogonalsystem in zwei Veränderlichen an und setzen in dem für uns in Frage kommenden Falle $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$P_{mn}(x', y') = c_{mn} \cdot \sqrt{1 - x'^2 - y'^2}^{-1} \cdot \frac{\partial^{m+n}}{\partial x'^m \partial y'^n} (1 - x'^2 - y'^2)^{m+n+\frac{1}{2}}$$

(3)

$$c_{mn} = \frac{(-1)^{m+n} \cdot (m+n+1)!}{m!\, n!\, 1 \cdot 3 \cdots (2m+2n+1)}. \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

Dann lautet unsere erste Behauptung:

I. *Das Doppelintegral* [3]) *über die Ellipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$-\frac{1}{4\pi} \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, P_{mn}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) \right) \frac{x - \xi}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, P_{mn}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) \right) \frac{y - \eta}{r^3} \right\} dx\, dy$$

$$= R_{mn}\left(\frac{\xi}{a}, \frac{\eta}{b}\right)$$

ist ein Polynom des Grades $m + n$ *in* ξ *und* η, *wobei* ξ, η *ein innerer Punkt der Ellipse ist. Die Koeffizienten von* R_{mn} *sind dabei durch die vollständigen elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung mit dem Modul* $k = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$ *darstellbar, wenn* $a \leqq b$ *vorausgesetzt wird.*

Zum Beweise beachten wir, daß

$$\frac{x - \xi}{r^3} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \frac{y - \eta}{r^3} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}$$

ist. Wir haben demnach auf Grund von (3) und (4) mit $x' = \frac{x}{a}$ und $y' = \frac{y}{b}$ den Ausdruck

a) $$-\frac{c_{mn}}{4\pi} \iint \left\{ \frac{1}{a} \frac{\partial^{m+n+1}}{\partial x'^{m+1} \partial y'^n} (1 - x'^2 - y'^2)^{m+n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \frac{1}{b} \frac{\partial^{m+n+1}}{\partial x'^m \partial y'^{n+1}} (1 - x'^2 - y'^2)^{m+n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \right\} dx\, d$$

zu ermitteln. Mehrfache Anwendung von Teilintegration, bei der die Randintegrale infolge des Verschwindens der Quadratwurzel am Rande stets fortfallen, liefert für (4a) den Wert

(4b) $$-\frac{a^m b^n c_{mn}}{4\pi} \left(\frac{\partial^{m+n+2}}{\partial \xi^{m+2} \partial \eta^n} + \frac{\partial^{m+n+2}}{\partial \xi^m \partial \eta^{n+2}} \right) \iint \frac{(1 - x'^2 - y'^2)^{m+n+\frac{1}{2}}}{r}\, dx\, dy,$$

[2]) L. Koschmieder, Über ein Biorthogonalsystem von Polynomen zweier Veränderlichen, Mathematische Annalen **91** (1924), S. 62—81.

[3]) Wir setzen $r(\zeta) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2}$ und definieren das Doppelintegral durch den Grenzwert $\zeta \to 0$. Leichte Umrechnung für $\zeta \neq 0$ ergibt den Wert

$$-\frac{1}{4\pi} \lim_{\zeta \to 0} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \iint \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, P_{mn}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) \frac{dx\, dy}{r(\zeta)},$$

oder, weil das letzte Integral der Gleichung $\Delta u = 0$ genügt,

$$+\frac{1}{4\pi} \lim_{\zeta \to 0} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \iint \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, P_{mn}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) \frac{dx\, dy}{r(\zeta)}.$$

Dies ist aber die Normalableitung des Potentials einer Doppelbelegung und geht daher stetig durch die Grenze. Entsprechend sind die weiteren Umformungen des Textes zu rechtfertigen.

so daß es vor allem auf die Berechnung des Integrals

$$\iint \frac{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{m+n+\frac{1}{2}}}{r}\,dx\,dy$$

ankommt. Einführung von Polarkoordinaten mit dem Zentrum ξ, η ergibt:

$$\iint\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{m+n+\frac{1}{2}}\frac{dx\,dy}{r}=\int_0^{2\pi}\int_0^{r(\varphi)}\sqrt{A+2Br-Cr^2}^{\,2m+2n+1}\,dr\,d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{CD}^{2m+2n+1}\int_0^{r(\varphi)}\sqrt{1-\frac{\left(r-\frac{B}{C}\right)^2}{D}}^{\,2m+2n+1}\,dr\,d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}D^{m+n+1}\sqrt{C}^{2m+2n+1}\int_{u_0}^{1}\sqrt{1-u^2}^{2m+2n+1}\,du\,d\varphi,$$

wobei

$$(5)\qquad A=1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2},\quad B=-\left(\frac{\xi\cos\varphi}{a^2}+\frac{\eta\sin\varphi}{b^2}\right),\quad C=\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2},$$

$$D=\frac{AC+B^2}{C^2}=\frac{C-E^2}{C^2},\quad E=\frac{\xi\sin\varphi-\eta\cos\varphi}{ab},\quad r=\frac{B}{C}+u\sqrt{D},\quad u_0=-\frac{B}{C\sqrt{D}}$$

gesetzt ist. Wir bezeichnen das innere Integral

$$\int_{u_0}^{1}\sqrt{1-u^2}^{2m+2n+1}\,du$$

kurz mit I_{m+n} und erhalten wegen der leicht zu beweisenden Rückkehrformel

$$I_{m+n}=\frac{2m+2n+1}{2m+2n+2}\cdot I_{m+n-1}-\frac{u_0\sqrt{1-u_0^2}^{2m+2n+1}}{2m+2n+2}$$

und wegen

$$I_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin u_0-u_0\sqrt{1-u_0^2}\right)$$

schließlich

$$(6)\qquad I_{m+n}=\frac{1\cdot3\cdots(2m+2n+1)}{2\cdot4\cdots(2m+2n+2)}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin u_0\right)-u_0\sqrt{1-u_0^2}\,L_{m+n}(u_0^2),$$

worin L_{m+n} ein Polynom in u_0^2 darstellt.

Wir bemerken nun, daß bei der nachfolgenden Integration über φ von 0 bis 2π alle diejenigen Glieder fortfallen, in denen der Integrand im Intervall von 0 bis π entgegengesetzt gleiche Werte annimmt wie im Intervall von π bis 2π. Nun zeigen aber die Formeln (5), daß C und D an der Stelle $\varphi+\pi$ denselben Wert, B aber den entgegengesetzten Wert annimmt wie an der Stelle φ. Daher fallen nach (6) bei der Integration über φ alle Bestandteile heraus, in denen u_0 auftritt, und es bleibt lediglich:

$$(7)\qquad \iint\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}^{\,2m+2n+1}\frac{dx\,dy}{r}=\frac{1\cdot3\cdots(2m+2n+1)}{2\cdot4\cdots(2m+2n+2)}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{2\pi}D^{m+n+1}\sqrt{C}^{2m+2n+1}\,d\varphi.$$

Hiervon ist nach (4b) zunächst die Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$, alsdann die Ableitung $\frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi^m\,\partial\eta^n}$ zu bilden. Wir erhalten nach (5):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)D^{\gamma+1}=\gamma(\gamma+1)\,D^{\gamma-1}\left(\left(\frac{\partial D}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial D}{\partial\eta}\right)^2\right)+(\gamma+1)\,D^{\gamma}\left(\frac{\partial^2 D}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 D}{\partial\eta^2}\right)$$

$$=(\gamma+1)\,D^{\gamma}\left(\frac{4\gamma E^2}{C^4a^2b^2}-\frac{2D}{C^2a^2b^2}\right)\qquad(\gamma=m+n)$$

$$=\frac{2(\gamma+1)\,D^{\gamma-1}(2\gamma-(2\gamma+1)\,CD)}{C^3a^2b^2}.$$

Daher entsteht schließlich unter Benutzung von (7):

$$(8)\quad -\frac{1}{4\pi}\int\int\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,P_{mn}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)\right)\frac{x-\xi}{r^3}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,P_{mn}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)\frac{y-\eta}{r^3}\right\}dx\,dy$$

$$=\frac{(-1)^{m+n}a^{m-2}b^{n-2}(m+n+1)}{m!\,n!\,2^{m+n+1}}$$

$$\cdot\frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi^m\,\partial\eta^n}\int_0^{2\pi}\left[(2m+2n+1)\,D^{m+n}\sqrt{C}^{2m+2n-3}-2(m+n)\,D^{m+n-1}\sqrt{C}^{2m+2n-5}\right]d\varphi=R_{mn}\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right).$$

Aus dieser Formel entnimmt man, da D ein quadratisches Polynom in ξ, η ist, daß R_{mn} ebenfalls ein Polynom in ξ, η wird und zwar vom Grade $\leqq m+n$; seine Koeffizienten sind durch elliptische Integrale von der Form

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi^{\varkappa}\cos\varphi^{\lambda}}{\sqrt{C^6}}\,d\varphi,$$

also durch die elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung mit dem Modul $k=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$ darstellbar.

Um nun zu zeigen, daß R_{mn} genau vom Grade $m+n$ ist, fassen wir die Glieder höchsten Gesamtgrades in (8) ins Auge; sie können in der Form

$$\frac{a^{m-2}b^{n-2}(m+n+1)(2m+2n+1)}{m!\,n!\,2^{m+n+1}}\,\frac{\partial^{m+n}}{\partial\xi^m\,\partial\eta^n}\int_0^{2\pi}\frac{E^{2(m+n)}}{\sqrt{C}^{2m+2n+3}}\,d\varphi$$

geschrieben werden. Hierin hat insbesondere das Glied mit $\left(\frac{\xi}{a}\right)^m\left(\frac{\eta}{b}\right)^n$ bis auf konstante von Null verschiedene Faktoren den Koeffizienten

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^{2m}\varphi\cos^{2n}\varphi}{\sqrt{C}^{2m+2n+3}}\,d\varphi,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Wir behaupten nun weiterhin:

II. *Die Polynome* $R_{mn}\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right)$ *sind sämtlich linear unabhängig und bilden ein vollständiges Polynomsystem.*

Zum Beweise stellen wir zunächst ein beliebiges R_{mn} mit der Indexsumme γ, das wir kurz mit R_γ bezeichnen, als lineare Verbindung der zu den P_{mn} biorthogonalen Polynome Q_{mn} dar:

$$(9)\qquad R_\gamma=\sum_{(\lambda)}a_{\gamma\lambda}Q_\lambda;$$

hierbei durchläuft Q_λ alle Polynome Q_{mn} mit der Indexsumme $\leqq\gamma$. Wir behaupten zunächst, daß hierbei nur die Polynome Q mit der Indexsumme γ mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten auftreten können. Auf Grund der Definition (4) gilt nämlich zunächst:

$$\iint R_{mn}\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right)P_{\mu\nu}\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right)\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}}\,d\xi\,d\eta =$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiiint\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,P_{mn}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,P_{mn}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\right\}P_{\mu\nu}\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right)\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}}\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iiiint\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,P_{mn}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}}\,P_{\mu\nu}\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,P_{mn}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}}\,P_{\mu\nu}\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right)\right)\right\}\frac{dx\,dy\,d\xi\,d\eta}{r},$$

und dies bleibt bei Vertauschung von (m, n) mit (μ, ν) ungeändert; also wird

$$\text{(10)}\qquad \iint R_{mn}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)P_{\mu\nu}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$$

$$=\iint R_{\mu\nu}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)P_{mn}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy.$$

Multiplizieren wir daher (9) mit $P_{\mu\nu}\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right)\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}}$ und integrieren, so ergibt sich wegen der Biorthogonalität der P und Q:

$$\text{(11)}\quad a_{\gamma\lambda}\cdot\frac{2\pi(\mu+\nu+1)!}{\mu!\,\nu!\,(2\mu+2\nu+3)!}=\iint R_{mn}\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right)P_{\mu\nu}\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right)\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}}\,d\xi\,d\eta\qquad(\gamma=m+n)$$

(vgl. Koschmieder a. a. O [2]), Formel (10)), also, da $a_{\gamma\lambda}=0$ ist für $\mu+\nu>\gamma$, daß wegen (10) auch $a_{\gamma\lambda}=0$ für $\mu+\nu<\gamma$ werden muß. Daher ist R_γ als lineare Verbindung der Q_{mn} desselben Grades darstellbar.

Es genügt also für unsere Behauptung II, zu zeigen, daß die verschiedenen Polynome R_{mn} mit $m+n=\gamma$ bei festem γ linear unabhängig sind. Wäre nun eine Relation

$$\sum_{m+n=\gamma}\lambda_{mn}R_{mn}=0$$

vorhanden, so bedeutete dies nach (5) und (8) insbesondere für die Glieder höchsten Gesamtgrades, wenn wir für $a^{m-2}b^{n-2}\lambda_{mn}$ kurz wieder λ_{mn} schreiben:

$$\sum_{m+n=\gamma}\frac{\lambda_{mn}}{m!\,n!}\frac{\partial^\gamma}{\partial\xi^m\,\partial\eta^n}\int_0^{2\pi}\frac{E^{2\gamma}}{\sqrt{C^{2\gamma+3}}}\,d\varphi=0,$$

$$\sum_{m+n=\gamma}\frac{\lambda_{mn}}{m!\,n!}\frac{\partial^\gamma}{\partial\xi^m\,\partial\eta^n}\int_0^{2\pi}\frac{(\xi\sin\varphi-\eta\cos\varphi)^{2\gamma}}{\sqrt{C^{2\gamma+3}}}\,d\varphi=0.$$

Multiplikation mit $P_{\mu\nu}\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right)\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}}$ $\qquad(\mu+\nu=\gamma)$ und Integration liefert

$$\iint\sum_{m+n=\gamma}\frac{\lambda_{mn}}{m!\,n!}\frac{\partial^\gamma}{\partial\xi^m\,\partial\eta^n}\left(\int_0^{2\pi}\frac{(\xi\sin\varphi-\eta\cos\varphi)^{2\gamma}}{\sqrt{C^{2\gamma+3}}}\,d\varphi\right)\frac{\partial^\gamma}{\partial\xi^\mu\,\partial\eta^\nu}\left(\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}}^{2\gamma+1}\right)d\xi\,d\eta=0$$

oder nach mehrfacher Teilintegration

$$\int \sum_{m+n=\gamma} \frac{\lambda_{mn}}{m!\,n!} \frac{\partial^{2\gamma}}{\partial\xi^{m+\mu}\,\partial\eta^{n+\nu}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{(\xi \sin\varphi - \eta\cos\varphi)^{2\gamma}}{\sqrt{C}^{2\gamma+3}}\, d\varphi \right) \cdot \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}^{2\gamma+1} \; d\xi\, d\eta = 0,$$

$$\int \sum_{m+n=\gamma} \frac{\lambda_{mn}(-1)^{n+\nu}}{m!\,n!} \cdot \frac{(2\gamma)!\,(\mu+m)!\,(\nu+n)!}{(m+\mu)!\,(n+\nu)!} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi^{m+\mu}\cos\varphi^{n+\nu}}{\sqrt{C}^{2\gamma+3}}\, d\varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}^{2\gamma+1} \; d\xi\, d\eta = 0.$$

Kürzung gemeinsamer von Null verschiedener Faktoren ergibt

$$(12) \qquad \sum_{m+n=\gamma} \frac{\lambda_{mn}}{m!\,n!} (-1)^{n+\nu} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^{m+\mu}\varphi\cos^{n+\nu}\varphi}{\sqrt{C}^{2\gamma+3}}\, d\varphi = 0 \qquad (\mu+\nu=\gamma).$$

Das auftretende Integral ist nur für gerade Werte beider Exponenten im Zähler von Null verschieden; wir setzen

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^{m+\mu}\varphi\cos^{2\gamma-(m+\mu)}\varphi}{\sqrt{C}^{2\gamma+3}}\, d\varphi = a_{m+\mu} \quad (m+\mu = 0, 1, 2, \ldots, 2\gamma).$$

Das Gleichungssystem für die $\gamma+1$ Größen $\frac{\lambda_{mn}}{m!\,n!}$, die wir mit $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_\gamma$ bezeichnen, lautet dann

$$\begin{aligned}
\varrho_0 a_0 + \varrho_1 a_1 \quad &+ \cdots + \varrho_\gamma a_\gamma \quad = 0,\\
\varrho_0 a_1 + \varrho_1 a_2 \quad &+ \cdots + \varrho_\gamma a_{\gamma+1} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varrho_0 a_\gamma + \varrho_1 a_{\gamma+1} &+ \cdots + \varrho_\gamma a_{2\gamma} \quad = 0.
\end{aligned}$$

Die zugehörige Determinante der Ordnung $\gamma+1$

$$\begin{vmatrix}
a_0 & 0 & a_2 & 0 & a_4 & \ldots & a_\gamma\\
0 & a_2 & 0 & a_4 & 0 & \ldots & a_{\gamma+1}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_\gamma & a_{\gamma+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2\gamma}
\end{vmatrix}$$

wird gleich dem Produkt der beiden Determinanten

bei ungeradem γ:

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{\gamma-1}\\
a_2 & a_4 & \ldots & \ldots & a_{\gamma+1}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{\gamma-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2\gamma-2}
\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}
a_2 & a_4 & \ldots & a_{\gamma+1}\\
a_4 & a_0 & \ldots & a_{\gamma+3}\\
 & & & \\
a_{\gamma+1} & \cdots & \cdots & a_{2\gamma}
\end{vmatrix};$$

bei geradem γ:

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_2 & \ldots & a_\gamma\\
a_2 & a_4 & \ldots & a_{\gamma+2}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_\gamma & a_{\gamma+2} & \ldots & a_{2\gamma}
\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}
a_2 & a_4 & \ldots & a_\gamma\\
a_4 & a_0 & \ldots & a_{\gamma+2}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_\gamma & a_{\gamma+2} & \ldots & a_{2\gamma-2}
\end{vmatrix}$$

von der Ordnung $\frac{\gamma+1}{2}$ bei ungeradem γ, bzw. von den Ordnungen $\frac{\gamma}{2}+1$ und $\frac{\gamma}{2}$ bei geradem γ. Diese Determinanten sind aber positiv, da die quadratischen Formen bei ungeradem γ

$$\sum_{\varkappa,\,\lambda=0}^{\frac{\gamma-1}{2}} a_{2(\varkappa+\lambda)}\, x_{2\varkappa}\, x_{2\lambda} = \int_0^{2\pi} \frac{(x_0\cos^\gamma\varphi + x_2\cos^{\gamma-2}\varphi\sin^2\varphi + \cdots + x_{\gamma-1}\cos\varphi\sin^{\gamma-1}\varphi)^2}{\sqrt{C}^{2\gamma+3}}\, d\varphi,$$

und

$$\sum_{\varkappa,\,\lambda=0}^{\frac{\gamma-1}{2}} a_{2(\varkappa+\lambda)+2}\, x_{2\varkappa+1}\, x_{2\lambda+1} = \int_0^{2\pi} \frac{(x_1\cos^{\gamma-1}\varphi\sin\varphi + x_3\cos^{\gamma-2}\varphi\sin^3\varphi + \cdots + x_\gamma\sin^\gamma\varphi)^2}{\sqrt{C}^{2\gamma+3}}\, d\varphi,$$

bei geradem γ

$$\sum_{\varkappa,\lambda=0}^{\frac{\gamma}{2}} a_{2(\varkappa+\lambda)}\, x_{2\varkappa}\, x_{2\lambda} = \int_0^{2\pi} \frac{(x_0 \cos^\gamma \varphi + x_2 \cos^{\gamma-2} \varphi \sin^2 \varphi + \cdots + x_\gamma \sin^\gamma \varphi)^2}{\sqrt{C^{2\gamma+3}}}\, d\varphi$$

und

$$\sum_{\varkappa,\lambda=0}^{\frac{\gamma}{2}-1} a_{2(\varkappa+\lambda)+2}\, x_{2\varkappa+1}\, x_{2\lambda+1} = \int_0^{2\pi} \frac{(x_1 \cos^{\gamma-1} \varphi \sin \varphi + \cdots + x_{\gamma-1} \sin^{\gamma-1} \varphi \cos \varphi)^2}{\sqrt{C^{2\gamma+3}}}\, d\varphi$$

stets für alle reellen Wertsysteme der in Frage kommenden Variablen $x_0, x_1, \ldots, x_\gamma$, die nicht aus lauter Nullen bestehen, positiv sind, weswegen auch die Determinanten der Koeffizienten der quadratischen Formen jeweils positiv sein müssen.

Hiernach ergibt sich aber aus dem Gleichungssystem (12)

$$\lambda_{mn} = 0$$

für alle Indizes m, n mit der Summe γ, wodurch die Behauptung bewiesen ist.

III. *An Stelle der Polynome P_{mn} lassen sich orthogonale lineare Verbindungen dieser Polynome Π_{mn} einführen, die zusammen mit geeigneten Polynomen K_{mn} ein vollständiges Biorthogonalsystem bilden, derart, daß die Gleichung*

$$(13)\quad -\frac{1}{4\pi}\iint\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\Pi_{mn}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)\right)\frac{x-\xi}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\Pi_{mn}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)\right)\frac{y-\eta}{r^3}\right\} dx\,dy = \varrho_{mn}\, K_{mn}\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right)$$

besteht. Hierbei sind die Faktoren ϱ_{mn} konstant und positiv.

Da die P_{mn} untereinander orthogonal sind, soweit ihr Grad verschieden ist, genügt es, Polynome desselben Grades P_{mn} durch geeignete lineare Verbindungen zu ersetzen.

Zunächst zeigt sich auf Grund von (9) und (11), daß die Polynome $\overline{R}_{mn} = m!\, n!\, R_{mn}$ lineare Verbindungen der Polynome $m!\, n!\, Q_{mn}$ sind, deren Matrix wegen (10) symmetrisch ist und nach dem vorangegangenen Beweise [4]) lauter positive Eigenwerte besitzt. Wir schreiben kurz

$$\overline{R}_{mn} = A(\overline{Q}_{mn}) \qquad (A = A',\ \ \overline{Q}_{mn} = m!\, n!\, Q_{mn}).$$

Ersetzen wir nun die $\overline{P}_{mn} = m!\, n!\, P_{mn}$, für die $m + n = \gamma$ ist, durch lineare Verbindungen Π_{mn} mit der orthogonalen Transformationsmatrix C, so entstehen an Stelle der $\overline{R}_{mn}$ lineare Verbindungen der $\overline{Q}_{mn}$ mit der Matrix CA. Ferner überzeugt man sich leicht, daß ein zum System der Π_{mn} biorthogonales System von Polynomen K_{mn} aus den $\overline{Q}_{mn}$ mit Hilfe derselben Transformation C gewonnen werden kann, d. h. es gilt

$$K_{mn} = C(\overline{Q}_{mn}),\ \overline{Q}_{mn} = C'(K_{mn}).$$

Daher ist schließlich

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\Pi_{mn}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)\right)\frac{x-\xi}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\Pi_{mn}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)\right)\frac{y-\eta}{r^3}\right\} dx\,dy = CAC'\left(K_{mn}\left(\frac{\xi}{a},\frac{\eta}{b}\right)\right).$$

Wird nun C als orthogonale Transformation derart gewählt, daß die symmetrische Matrix A auf die Diagonalform transformiert wird, so entsteht die Behauptung (13), wobei die Zahlenfaktoren ϱ_{mn} die Eigenwerte der Matrix A, also positive Zahlen darstellen.

Hiermit ist die Ausgangsgleichung (2) *sinngemäß vollständig in das Gebiet zweier Variabler übertragen.*

---

[4]) Es handelt sich dort in der Tat bis auf unwesentliche positive Faktoren um dieselbe Matrix wie hier, da die Glieder niedrigeren Grades keinen Anteil liefern.

IV. *Anwendung auf die Lösung einer Integrodifferentialgleichung aus der Theorie der räumlichen Potentialströmungen.*

Die Aufgabe der Berechnung der räumlichen Potentialströmung um eine dünne Fläche von elliptischem Umriß, die beliebig gewölbt, aber nur wenig von der x, y-Ebene verschieden sein soll, kann nach den in der Strömungslehre üblichen Methoden auf eine Wirbelbelegung der Fläche bzw. in erster Annäherung des elliptischen Bereichs der x, y-Ebene selbst zurückgeführt werden. Ist diese Wirbelbelegung bekannt, so ist damit die Strömung im ganzen Raume festgelegt, wenn die Anströmung aus dem Unendlichen vorgegeben ist. Bedeutet $\Psi(x, y, z)$ das Strömungspotential, so ist die Wirbelbelegung durch die Differenz der Funktionswerte von Ψ an der Ober- und Unterseite der Fläche bestimmt, die wir mit $\Phi(x, y)$ bezeichnen. Da die Werte von Φ am Rande der Ellipse zu Null angenommen werden dürfen, so erweist sich für $\Phi(x, y)$ ein Ansatz der Form

$$\Phi(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \sum_{m, n=0}^{\infty} A_{mn} \Pi_{mn}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$$

als zweckmäßig. Ferner bestimmt sich nach dem Biot-Savartschen Gesetz die infolge der Wirbelbelegung in einem Punkte ξ, η der Fläche (bzw. ihrer Projektion auf die x, y-Ebene) induzierte Abwärtsgeschwindigkeit zu

$$w(\xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi} \iint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{x - \xi}{r^3} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{y - \eta}{r^3} \right) dx\, dy. \tag{14}$$

Diese Abwärtsgeschwindigkeit ist aber bekannt, wenn die Anströmung aus dem Unendlichen und die Wölbung der Fläche gegeben ist; *die Aufgabe besteht also in der Ermittlung der Lösung der Integrodifferentialgleichung* (14) *bei gegebenem* $w(\xi, \eta)$.

Setzt man gleichmäßige Konvergenz der Entwicklung von Φ und seiner partiellen Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ voraus, so folgt aus (13)

$$w(\xi, \eta) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \varrho_{mn} A_{mn} K_{mn}\left(\frac{\xi}{a}, \frac{\eta}{b}\right).$$

Da andererseits die gegebene Funktion w von vornherein nach den Polynomen K_{mn} entwickelt werden kann, so sind damit die Koeffizienten $\varrho_{mn} A_{mn}$, also die gesuchten A_{mn} selbst bestimmt. Ist z. B. $w(\xi, \eta)$ selbst als Polynom gegeben, was für die Zwecke der Anwendungen vollauf genügt, so wird auch $\Phi(x, y) : \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ ein Polynom desselben Grades. Der Sonderfall einer *ebenen* Ellipsenfläche liefert $w = \text{konst.}$, also $\Phi = \text{konst.} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, ein Resultat, das bereits aus der klassischen Theorie der Potentialströmung um ein dreiachsiges Ellipsoid durch den Grenzübergang, bei dem die dritte Achse gegen Null strebt, gewonnen werden kann.

Die vorstehenden Entwicklungen liefern mit elementaren Hilfsmitteln einen Beitrag zu der Aufgabe, die Birnbaum-Glauertsche Theorie der ebenen Potentialströmung um ein dünnes Profil [5]) in den Raum zu übertragen.

Berlin, den 21. 5. 1940.

---

[5]) Vgl. z. B. Glauert, Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie, Berlin 1929.

Eingegangen 27. Mai 1940.

Über den Euklidischen Algorithmus in reellquadratischen Zahlkörpern.

Von *L. Rédei* in Budapest.

In einem absolut quadratischen Zahlkörper K mit der Diskriminante D gilt der Euklidische Algorithmus (kurz E. A.), wenn es zu jedem Paar α, β $(\neq 0)$ von ganzen Körperzahlen eine dritte ganze Körperzahl γ mit $|N(\alpha - \beta\gamma)| < |N\beta|$ gibt, wobei N das Zeichen für die Norm ist.

Nach mehreren Arbeiten[1]) gilt der E. A. für $D = -11, -8, -7, -4, -3, 5, 8, 12, 13, 17, 21, 24, 28, 29, 33, 37, 41, 44, 57, 76$, aber für keine weiteren D, die $\equiv 1 \pmod 4$ sind. Nach Schuster[2]) und einer ungarischen Arbeit[3]) von mir gilt er für keine weiteren zusammengesetzten D. Die Primzahlwerte D, für die der E. A. noch gelten kann, sind alle $\geqq 61$ und $\not\equiv 5 \pmod{24}$ (vgl. [1])), und nach Erdös und Ko[4]) ist deren Anzahl endlich. Übrigens läßt sich leicht überprüfen[5]), daß bei den letzteren D der E. A. bis zur Schranke 3001 nur für $D = 61, 73, 89, 97\ 109, 113, 137, 193, 241, 313, 337, 457, 601$ gelten kann (für diese D ist die Klassenzahl gleich 1).

Vollständigkeitshalber erwähne ich noch das durch die Arbeiten[2]), [3]) überholte Resultat von Heilbronn[6]) über die Endlichkeit der Anzahl der zusammengesetzten D mit E. A.

Des näheren enthält meine Arbeit[3]) den Satz, daß es keine durch 3 unteilbaren ungeraden zusammengesetzten D mit E. A. gibt. Da, wie schon erwähnt, durch diesen Satz die Frage für zusammengesetzte D abgeschlossen wurde, möchte ich hier den Beweis auch deutsch veröffentlichen, zugleich auch deshalb, weil ich inzwischen den Beweis mit wenig Veränderungen so umgestalten konnte, daß er durch Vermeiden des Satzes von Hasse[7]) über die Verteilung der quadratischen Reste elementar wurde. (Somit ist das bisher Erreichte eine elementare Tatsache bis auf den Endlichkeitssatz von Erdös und Ko.) Alle Einzelresultate von Schuster[2]) werden, wie auch in[3]), wiedererhalten,

---

[1]) Siehe hierüber z. B. H. Behrbohm u. L. Rédei, Der Euklidische Algorithmus in quadratischen Körpern, dieses Journ. **174** (1936), 192—205, insb. die letzte Seite.

[2]) L. Schuster, Reellquadratische Zahlkörper ohne Euklidischen Algorithmus, Monatsh. f. Math. u. Phys. **47** (1939), 117—127.

[3]) L. Rédei, Euklides algoritmusáról valós másodfokú számtestekben, Mat. és Fiz. Lapok **47** (1940), 78—89, mit deutschem Auszug. Hierbei war mir die Arbeit von Schuster noch unbekannt.

[4]) P. Erdös u. Ch. Ko, Note on the Euclidean algorithm, Journ. London Math. Soc. **13** (1938), 3—8.

[5]) Nach der Arbeit[1]), S. 198.

[6]) H. Heilbronn, On Euclid's algorithm in real quadratic fields, Proc. Cambridge Philos. Soc. **34** (1938), 521 bis 526.

[7]) H. Hasse, Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern, Abh. Math. Sem. Hamburg **10** (1934), 325—348, insb. S. 347.

bis auf den von ihm vollständig erledigten Fall $3 \mid D$ [8]). Am Ende der Arbeit werde ich kurz darauf hinweisen, inwieweit sich der Beweis durch Heranziehung der Hasseschen Arbeit [7]) verkürzen läßt.

* * *

Beim Beweis dürfen wir uns auf den Fall $D = pq$ ($7 \leqq p < q$, $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$, p, q Primzahlen) beschränken [9]). Wir setzen den E. A. in K voraus, um daraus einen Widerspruch zu erhalten. Es sei $\varepsilon = \frac{q}{p} (> 1)$. Kleine lateinische Buchstaben bedeuten ganze rationale Zahlen. Ist $a > 0$ und

$$\left(\frac{x}{p}\right) = \left(\frac{x+1}{p}\right) = \cdots = \left(\frac{x+a}{p}\right), \tag{1}$$

so nennen wir $x, x+1, \ldots, x+a$ eine ($(a+1)$-gliedrige) Sequenz (für p). Je nachdem der gemeinsame Symbolwert in (1) gleich 1 oder -1 ist, sprechen wir von einer positiven bzw. negativen Sequenz. Es gilt folgendes:

a. Ist $x, x+1, \ldots, x+a$ eine Sequenz für p, so ist für jedes y mit $x\varepsilon < y < (x+a)\varepsilon$

$$\left(\frac{y}{q}\right) = \left(\frac{x}{p}\right). \tag{2}$$

Zunächst ist **a** richtig [10]), wenn die gegebene Sequenz positiv und $0 < x < p$ ist. Die erste Einschränkung kann man wegen $\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right) = -1$ offenbar fortlassen, und von der zweiten sieht man das noch einfacher.

Da nach [10]) p und q in **a** vertauschbar sind, wobei dann natürlich ε durch ε^{-1} zu ersetzen ist, so erhellt folgendes:

b. Ist

$$\left(\frac{y}{q}\right) = \left(\frac{y+1}{q}\right) = -\left(\frac{x}{p}\right), \tag{3}$$

so gilt nicht $y < x\varepsilon < y+1$.

Wir beweisen das folgende **c**, woraus dann **d** durch Anwendung auf $x = x_1, x_2, \ldots, x_l$ unmittelbar folgt.

c. Ist $\left(\frac{x}{p}\right) = \left(\frac{x+a}{p}\right)$ $(0 < x < x+a < p)$, so gilt für alle y mit $x\varepsilon < y < (x+a)\varepsilon$, $py \equiv qx \pmod a$ — offenbar gibt es wenigstens ein solches y —

$$\left(\frac{y}{q}\right) = \left(\frac{a}{pq}\right)\left(\frac{x}{p}\right). \tag{4}$$

d. Ist $0 < x_1, x_2, \ldots, x_l < p - a$ $(a \geqq 2,\ 2 \leqq l \leqq a)$,

$$\left(\frac{x_1}{p}\right) = \left(\frac{x_2}{p}\right) = \cdots = \left(\frac{x_l}{p}\right) = \left(\frac{x_1+a}{p}\right) = \left(\frac{x_2+a}{p}\right) = \cdots = \left(\frac{x_l+a}{p}\right),$$

und sind $x_1, x_2, \ldots, x_l$ paarweise inkongruent mod a, so gibt es ebenfalls mod a paarweise inkongruente Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_l$ mit $x_i\varepsilon < y_i < (x_i + a)\varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ und

---

[8]) Diesen Sonderfall $3 \mid D$ kann ich nicht ähnlich wie die übrigen zusammengesetzten D behandeln. Die erste Hälfte des Schusterschen Beweises läßt sich etwas einfacher so gewinnen, daß man in (2″) der Arbeit [1]) $m = 3p$, $r = 3p - 9\sigma$ setzt.

[9]) S. Arbeit [1]), S. 193.

[10]) S. Arbeit [1]), S. 199, Zeile 9—12 von unten; in Zeile 12 muß es dort p statt q heißen. Es ist zu bemerken, daß dort p und q gleichberechtigt sind, denn es wurde nicht $p < q$ vorausgesetzt. Obiges **a** entsteht nach Vertauschung von p und q.

$$\left(\frac{y_1}{q}\right) = \left(\frac{y_2}{q}\right) = \cdots = \left(\frac{y_l}{q}\right) = \left(\frac{a}{pq}\right)\left(\frac{x_1}{p}\right).$$

Wir bestimmen nämlich n durch $0 \leqq n < a$, $a \mid x + np$. Wegen

$$(y + nq)p = py + npq \equiv qx + npq = (x + np)q \pmod{a}$$

ist $a \mid y + nq$. Für die ganzen Zahlen $u = \frac{1}{a}(x + np)$, $u + 1 = \frac{1}{a}(x + a + np)$, $v = \frac{1}{a}(y + nq)$ gilt

$$\left(\frac{u}{p}\right) = \left(\frac{ax}{p}\right) = \left(\frac{a(x+a)}{p}\right) = \left(\frac{u+1}{p}\right), \quad \left(\frac{v}{q}\right) = \left(\frac{ay}{q}\right),$$

$$u\varepsilon = \frac{1}{a}(x\varepsilon + nq) < v < \frac{1}{a}((x + a)\varepsilon + nq) = (u + 1)\varepsilon.$$

Durch Anwendung von **a** auf $x = u$, $a = 1$ folgt hieraus nach (2) $\left(\frac{v}{q}\right) = \left(\frac{u}{p}\right)$, d. h. (4). Damit sind **c** und **d** bewiesen.

Unter den y von **a** kommen alle y von **c** vor, und somit folgt im Falle **a** auch noch $\left(\frac{a}{pq}\right) = 1$. Daraus folgt:

e. Gibt es für p eine a-gliedrige Sequenz ($a \geqq 2$), so ist

$$1 = \left(\frac{2}{pq}\right) = \left(\frac{3}{pq}\right) = \cdots = \left(\frac{a-1}{pq}\right).$$

Jetzt beweisen wir:

f. Es ist $p \geqq 11$ und

$$1 = \left(\frac{2}{pq}\right). \tag{5}$$

Nach E. Jacobsthal[11]) gibt es für $p \geqq 11$ wenigstens eine dreigliedrige Sequenz; somit brauchen wir nach **e** nur noch die Unmöglichkeit von $p = 7$ zu beweisen. Für $p = 7$ ist $\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{6}{p}\right) = -1$. Daraus entsteht ein Widerspruch mit **a**, wenn wir ein y mit $\frac{5q}{7} < y < \frac{6q}{7}$ angeben, das ein quadratischer Rest mod q ist. Ist $q > 154$, so ist die Länge des Intervalls $\sqrt{\frac{5q}{7}}, \sqrt{\frac{6q}{7}}$ größer als 1, und daher enthält es mindestens eine ganze Zahl, deren Quadrat dann ein passendes y ist. Für die übrigen q geben wir einen quadratischen Nichtrest z mit $\frac{q}{7} < z < \frac{2q}{7}$ an (dann ist $q - z$ ein passendes y):

$q =$	11	19	23	31	43	47	59	67	71	79	83	103	107	127	131	139	151
$z =$	2	3	5	6	8	10	10	18	14	12	18	20	20	20	30	27	27.

Damit ist **f** bewiesen.

Nach **f** lautet **c** für $a = 2$ einfacher so:

g. Ist $\left(\frac{x}{p}\right) = \left(\frac{x+2}{p}\right)$ $(0 < x < p - 2)$, so gilt für alle y mit $x\varepsilon < y < (x + 2)\varepsilon$, $y \equiv x \pmod 2$

$$\left(\frac{y}{q}\right) = \left(\frac{x}{p}\right).$$

---

[11]) E. Jacobsthal, Anwendungen einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste, Dissertation Berlin 1906, S. 290.

Wir nennen eine Sequenz $x, x+1, \ldots, x+a$ eine Maximalsequenz (für p), wenn weder $x-1$, x noch $x+a$, $x+a+1$ eine Sequenz ist. Weiter nennen wir eine Sequenz $x, x+1, \ldots, x+a$ eine innere Sequenz (für p), wenn weder $p \mid x-1$ noch $p \mid x+a+1$ ist[12]). Es gilt folgendes:

h. Gibt es eine a-gliedrige innere Maximalsequenz für p ($a \geqq 2$), so ist entweder $\left(\frac{a+1}{pq}\right) = -1$ oder $\varepsilon < \frac{a+1}{a-1}$.

Es sei nämlich $x, x+1, \ldots, x+a-1$ eine solche Sequenz:

$$-\left(\frac{x-1}{p}\right) = \left(\frac{x}{p}\right) = \left(\frac{x+1}{p}\right) = \cdots = \left(\frac{x+a-1}{p}\right) = -\left(\frac{x+a}{p}\right).$$

Aus dem auf $x-1, x+a$ (statt auf $x, x+a$) angewendeten **c** folgt, daß für alle y des Intervalls $x\varepsilon, (x+a-1)\varepsilon$ mit $py \equiv qx \pmod{a+1}$

$$\left(\frac{y}{q}\right) = \left(\frac{a+1}{pq}\right)\left(\frac{x-1}{p}\right) = -\left(\frac{a+1}{pq}\right)\left(\frac{x}{p}\right).$$

Ist nun die Länge $(a-1)\varepsilon$ dieses Intervalls $> a+1$, so gibt es wenigstens ein solches y. Andererseits folgt aus dem auf $x, x+1, \ldots, x+a-1$ angewendeten **a**

$$\left(\frac{y}{q}\right) = \left(\frac{x}{p}\right),$$

und somit ist **h** richtig.

Für $a=3$ folgt aus **h** (wegen $\left(\frac{1}{p}\right) = \left(\frac{4}{p}\right)$ kann eine dreigliedrige Maximalsequenz nur eine innere sein!):

i. Ist $\varepsilon > 2$, so gibt es keine dreigliedrige Maximalsequenz für p.

Bedeutet p_a ($a \geqq 2$) die Anzahl der a-gliedrigen positiven Maximalsequenzen für p im Intervall $0, p$, so läßt sich die Anzahl der zwei- und dreigliedrigen positiven Sequenzen in diesem Intervall nach Lagrange und Jacobsthal[11]) folgendermaßen ausdrücken[13]):

$$\sum_{a \geqq 2} (a-1)\, p_a = \left[\frac{p}{4}\right], \tag{6}$$

$$\sum_{a \geqq 3} (a-2)\, p_a = \left[\frac{p}{8}\right], \tag{7}$$

wobei $[\xi]$ das Zeichen für die größte ganze Zahl $\leqq \xi$ ist. Zieht man das $\frac{3}{2}$-fache von (7) von (6) ab, so entsteht nach Weglassen nichtpositiver Glieder

$$p_2 + \frac{1}{2} p_3 \geqq \left[\frac{p}{4}\right] - \frac{3}{2}\left[\frac{p}{8}\right]. \tag{8}$$

Aus diesen Formeln beweisen wir zunächst:

j. Ist $\varepsilon > 2$, so ist

$$1 = \left(\frac{2}{pq}\right) = \left(\frac{3}{pq}\right). \tag{9}$$

Nach **i** ist jetzt nämlich $p_3 = 0$. Andererseits ist nach **f** $p \geqq 11$, woraus $\left[\frac{p}{8}\right] \geqq 1$ folgt; daher muß es nach (7) mindestens eine (positive) Sequenz für p geben, die wenigstens 4-gliedrig ist. Daraus folgt nach **e** $\left(\frac{3}{pq}\right) = 1$, und das ergibt mit **f** zusammen **j**. Weiter beweisen wir:

---

[12]) Ich mache darauf aufmerksam, daß „positive Maximalsequenz" in der vorliegenden Arbeit und „Sequenz" in der Arbeit [1]) gleiche Begriffe sind. Hier bemerke ich noch, daß in der Arbeit [1]), S. 199, Zeile 6 von unten, „$=$" durch „$\neq 1$," zu ersetzen ist.

[13]) S. Arbeit[1]), S. 200.

k. Es ist $\varepsilon < 3$.

Denn nehmen wir an, daß $\varepsilon > 2$. Es ist dann, wie eben bemerkt, $p_3 = 0$. Für $p \geqq 23$ ist also nach (8) $p_2 \geqq 2$, und das bedeutet, daß es wenigstens eine zweigliedrige innere Maximalsequenz gibt. Auch für $p = 19$ ist 2, 3 eine solche Sequenz. Für $p \geqq 19$ ist dann nach **h** entweder $\left(\frac{3}{pq}\right) = -1$ oder $\varepsilon < 3$. Wegen **j** folgt daraus **k** bis auf den Fall $p = 11$. Dieser kommt jedoch nicht in Frage, denn dann wäre 3, 4, 5 eine dreigliedrige Maximalsequenz, im Widerspruch mit **i**. Wir behaupten jetzt:

l. Ist $\varepsilon > 2$ und $1 = \left(\frac{2}{pq}\right) = \left(\frac{3}{pq}\right) = \cdots = \left(\frac{r}{pq}\right)$ $(r \geqq 2)$, so ist $1, 2, \ldots, r$ eine Sequenz für p.

Wir beweisen davon zuerst $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$. Wenn das nämlich falsch wäre, dann wäre $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$. Wegen $2 < \varepsilon < 3$ kann (3) für $x = 1$, $y = 2$ nicht bestehen, woraus $\left(\frac{3}{q}\right) = 1$ folgt. Nach **j** ist dann $\left(\frac{3}{p}\right) = 1$. Somit gilt[14]):

	2	3	4	5	6	7	8
p	−1	1	1	−1	−1		
q	−1	1	1		−1		−1,

wobei $\left(\frac{5}{p}\right) = -1$ eine Folgerung aus **i** ist. Aus dem auf die Sequenz 3, 4 angewendeten **a** folgt wegen $4\varepsilon > 8$, daß auch $3\varepsilon > 8$ gelten muß. Dann ist aber $5\varepsilon < 16 < 6\varepsilon$; das ist ein Widerspruch mit **a** (angewendet auf die Sequenz 5, 6).

Aus dem Bewiesenen folgt vor allem, daß **l** für $r = 2$ richtig ist, weshalb wir nachher $r \geqq 3$ annehmen dürfen. Weiter folgt, daß für p eine Sequenz $1, 2, \ldots, s$ existiert, in der $s \geqq 2$ ist. Wir nehmen $s < r$ an, denn sonst ist **l** richtig. Wegen $\varepsilon < 3 \leqq s + 1 < s\varepsilon$ folgt aus **a**, daß $3, 4, \ldots, s + 1$ eine positive Sequenz für q ist. Insbesondere ist dann $\left(\frac{s+1}{q}\right) = 1$, woraus noch $\left(\frac{s+1}{p}\right) = 1$ folgt. Es ist also auch $1, 2, \ldots, s, s + 1$ eine Sequenz für p, und das beweist **l**. Jetzt beweisen wir:

m. Es gilt nicht $1 = \left(\frac{2}{pq}\right) = \left(\frac{3}{pq}\right) = \cdots = \left(\frac{p-1}{pq}\right)$.

Andernfalls folgt aus **l** vor allem $\varepsilon < 2$. Weiter ist dann für $x = 1, 2, \ldots, p - 1$

$$\left(\frac{x}{q}\right) = \left(\frac{x}{p}\right) = -\left(\frac{p-x}{p}\right) = -\left(\frac{p-x}{q}\right) = \left(\frac{x-p}{q}\right).$$

Ist p' eine Lösung von $pp' \equiv -1 \pmod{q}$, so folgt daraus, daß $p'x$, $p'x + 1$ eine zweigliedrige Sequenz für q ist, und zwar sind alle diese Sequenzen mod q verschieden. Nach Lagrange gilt dann $p - 1 \leqq \frac{q-3}{2}$. Hiernach ist $q \geqq 2p + 1$ im Widerspruch mit $\varepsilon < 2$. Also ist **m** richtig. Wir zeigen nun:

n. Ist $s \geqq 1$, $t - s \geqq 2$,

$$1 = \left(\frac{2}{pq}\right) = \left(\frac{3}{pq}\right) = \cdots = \left(\frac{t-1}{pq}\right) = -\left(\frac{t}{pq}\right),$$

$$-\left(\frac{s}{p}\right) = \left(\frac{s+1}{p}\right) = \left(\frac{s+2}{p}\right) = \cdots = \left(\frac{t-p}{p}\right) = -\left(\frac{t}{p}\right),$$

so ist $\varepsilon > \frac{s+1}{s}$.

---

[14]) Obige Tabelle bedeutet, daß $\left(\frac{2}{p}\right) = -1, \left(\frac{3}{p}\right) = 1, \ldots; \left(\frac{2}{q}\right) = -1, \ldots$ ist. Ähnlich sind die später noch vorkommenden Tabellen zu verstehen.

Nehmen wir das Gegenteil an. Dann ist $s\varepsilon < s + 1$, woraus folgt, daß das Intervall $s\varepsilon, t\varepsilon$ das volle Restsystem $s + 1, s + 2, \ldots, t \pmod{t - s}$ enthält. Durch Anwendung von **c** auf $x = s$, $a = t - s$ ergibt sich daraus, daß ein y mit

$$\left(\frac{y}{q}\right) = \left(\frac{t-s}{pq}\right)\left(\frac{s}{p}\right) \quad (s + 1 \leqq y \leqq t)$$

existiert. Aus den Voraussetzungen folgt aber $\left(\frac{y}{q}\right) = -\left(\frac{s}{p}\right)$, $\left(\frac{t-s}{pq}\right) = 1$. Dieser Widerspruch beweist **n**. Als letzte Vorbereitung beweisen wir:

o. Ist $2 \leqq r \leqq p - 2$,

$$1 = \left(\frac{2}{pq}\right) = \left(\frac{3}{pq}\right) = \cdots = \left(\frac{r}{pq}\right),$$

und ist $1, 2, \ldots, r$ keine Sequenz für p, so ist $\varepsilon < \frac{r+1}{r}$.

Vor allem ist jetzt nämlich nach **l** $\varepsilon < 2$. Weiter setzen wir **o** im Fall $r \geqq 3$ für $r - 1$ (statt r) voraus. Dann zeigen wir vorläufig nur $\varepsilon < \frac{r}{r-1}$. Für $r = 2$ ist das richtig. Wegen der Voraussetzung ist das auch für $r \geqq 3$ wahr, wenn $1, 2, \ldots, r - 1$ keine Sequenz für p ist. Im anderen Fall muß $\left(\frac{r}{p}\right) = -1$, zugleich auch $\left(\frac{r}{q}\right) = -1$ sein. Aus der Anwendung von **a** auf die Sequenz $1, 2, \ldots, r - 1$ folgt wegen $\varepsilon < 2 < r$, daß auch $(r - 1)\varepsilon < r$ ist. Somit ist in der Tat $\varepsilon < \frac{r}{r-1}$.

Wir nehmen nun an, daß im Gegensatz zur Behauptung $\varepsilon > \frac{r+1}{r}$ ist, und unterscheiden die folgenden Fälle 1)—222) [allgemein ist dabei $ab \cdots ef$) ein Spezialfall von $ab \cdots e$)]:

1) $p^{r-1}_{\mu}\,{}^{r+1}_{\mu}$.[15]) Dann ist

$$\left(\frac{r^2-1}{p}\right) = \left(\frac{r^2}{p}\right) = 1, \quad (r^2 - 1)\varepsilon = (r - 1)\varepsilon \cdot (r + 1) < r(r + 1) < r \cdot r\varepsilon = r^2\varepsilon,$$

woraus nach **a** $\left(\frac{r(r+1)}{q}\right) = 1$, $\left(\frac{r}{q}\right) = \left(\frac{r+1}{q}\right)$ folgt. Also ist

$$p^{r-1}_{\mu}\,{}^{r}_{\nu}\,{}^{r+1}_{\mu}$$
$$q^{\ }_{\mu}\,{}^{\ }_{\nu}\,{}^{\ }_{\nu}$$

11) $\mu = \nu$. Da $1, 2, , \ldots, r$ keine Sequenz für p ist, muß jetzt $r \geqq 3$ sein, weiter muß ein Element s von $1, 2, \ldots, r - 2$ mit $\left(\frac{s}{p}\right) = -\mu$ vorhanden sein. Es sei s größtmöglich gewählt. Bedeute noch t die kleinste Zahl aus der Reihe $r + 2, r + 3, \ldots, p - 1$ mit $\left(\frac{t}{p}\right) = -\mu$. Auch t muß existieren, denn sonst wäre $r - 1, r, \ldots, p - 1$ eine Sequenz für p, woraus nach **a** wegen $(r - 1)\varepsilon < r < p - 1 < (p - 1)\varepsilon$ folgt, daß $r, r + 1, \ldots, p - 1$ eine Sequenz für q ist; dann ist aber $\left(\frac{r}{pq}\right) = \left(\frac{r+1}{pq}\right) = \cdots = \left(\frac{p-1}{pq}\right)$ im Gegensatz zu **m**.

Wegen

$$(r - 1)\varepsilon < r < t = (r + 1) + (t - r - 1) < r\varepsilon + (t - r - 1)\varepsilon = (t - 1)\varepsilon$$

folgt nach **a**, daß $r, r + 1, \ldots, t$ eine Sequenz für q ist. Somit liegt der Fall **n** vor, wonach $\varepsilon > \frac{s+1}{s}$ ist. Da aber $s \leqq r - 2$, haben wir mit $\varepsilon < \frac{r}{r-1}$ einen Widerspruch.

---

[15]) μ (später auch ν und ϱ) bedeutet eine nicht näher bestimmte der beiden Zahlen ± 1.

12) $\mu = -\nu$. Wegen $(r-1)\varepsilon < r+1 < (r+1)\varepsilon$, $r+1 \equiv r-1 \pmod 2$ entsteht ein Widerspruch mit dem Fall $x = r-1$ von g.

2) $\begin{matrix} & r-1 & r+1 \\ p & \mu & -\mu. \end{matrix}$ Wir unterscheiden weitere Fälle:

21) $\begin{matrix} & r-1 & r & r+1 \\ p & \mu & \mu & -\mu. \end{matrix}$ Wegen $(r-1)\varepsilon < r+1 < r\varepsilon$ gilt nach a $\left(\frac{r+1}{q}\right) = \mu$. Alles geht jetzt ebenso wie im Fall 11) mit der Vereinfachung, daß wir jetzt $t = r+1$ nehmen.

22) $\begin{matrix} & r-1 & r & r+1 \\ p & \mu & -\mu & -\mu. \end{matrix}$ Wegen

$$r\varepsilon = (r-1)\,\varepsilon + \varepsilon < r+2 = (r+1)+1 < r\varepsilon + \varepsilon = (r+1)\,\varepsilon$$

folgt aus a $\left(\frac{r+2}{q}\right) = -\mu$. Somit gilt

$$\begin{matrix} & r-1 & r & r+1 & r+2 \\ p & \mu & -\mu & -\mu & \\ q & \mu & -\mu & & -\mu. \end{matrix}$$

221) $\left(\frac{r+1}{q}\right) = -\mu$. Wir denken uns μ durch $-\mu$ ersetzt. Dann ist das wieder ein zu 11) ähnlicher Fall, mit dem Unterschied, daß jetzt auch $r = 2$ möglich ist und einfach $s = r-1$ gesetzt wird.

222) $\left(\frac{r+1}{q}\right) = \mu$. Wegen $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right)$ gilt

$$\begin{matrix} & 2r-2 & 2r & 2r+2 \\ p & \varrho & -\varrho & \\ q & & -\varrho & \varrho. \end{matrix}$$

Da

$$(2r-2)\,\varepsilon < 2r = (r+1)+(r-1) < r\varepsilon + (r-1)\varepsilon = (2r-1)\,\varepsilon$$

und

$$(2r-1)\,\varepsilon = 2\,(r-1)\,\varepsilon + \varepsilon < 2r+2 < 2r\varepsilon,$$

führt im Fall $\left(\frac{2r-1}{p}\right) = \varrho$ die Sequenz $2r-2$, $2r-1$, im Fall $\left(\frac{2r-1}{p}\right) = -\varrho$ die Sequenz $2r-1, 2r$ zu einem Widerspruch mit a. Der restliche Fall $\left(\frac{2r-1}{p}\right) = 0$, d. h. $p \mid 2r-1$, ist auch unmöglich, da dann $r = \frac{p+1}{2}$, $q = \varepsilon p < \frac{pr}{r-1} < p+3$ wäre, obwohl doch immer $q \geqq p+4$ ist. Damit haben wir o bewiesen.

Von nun an bedeute u die durch

$$(10) \qquad 1 = \left(\frac{2}{pq}\right) = \left(\frac{3}{pq}\right) = \cdots = \left(\frac{u-1}{pq}\right),\ \left(\frac{u}{pq}\right) = -1$$

definierte Zahl. Nach m existiert u sicher und ist nach f eine ungerade Primzahl mit $3 \leqq u \leqq p-2$. Ich unterscheide die Fälle A), B):

A) $1, 2, \ldots, u-1$ ist keine Sequenz für p. Wegen (10) und $u-1 \geqq 2$ ist nach o $\varepsilon < \frac{u}{u-1}$. Wäre $\left(\frac{u-1}{p}\right) = \left(\frac{u}{p}\right) = \mu$, so wäre nach (10) $\left(\frac{u}{q}\right) = -\mu$, und das ist wegen $(u-1)\,\varepsilon < u < u\varepsilon$ ein Widerspruch mit a. Also gilt

$$\begin{matrix} & u-1 & u \\ p & \mu & -\mu \\ q & \mu & \mu. \end{matrix}$$

Es sei s die größte Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, u-2$ mit $\left(\frac{s}{p}\right) = -\mu$. Wir setzen noch $t = u$. Dann folgt aus **n** $\varepsilon > \frac{s+1}{s} > \frac{u}{u-1}$, was ein Widerspruch ist.

B) $1, 2, \ldots, u-1$ ist eine Sequenz für p. Ich definiere v durch

$$(11) \qquad 1 = \left(\frac{2}{q}\right) = \left(\frac{3}{q}\right) = \cdots = \left(\frac{v-1}{q}\right), \left(\frac{v}{q}\right) = -1.$$

Wegen **f** ist $v \geqq 3$. Dann muß v eine ungerade Primzahl sein. Wegen $\varepsilon < 3$, $u - 1 < (u-1)\varepsilon$ ist nach **a** $v \geqq u$. Wäre auch $1, 2, \ldots, u$ eine Sequenz für p, so würde ebenso folgen, daß $v \geqq u+1$, und das ist wegen (10) und (11) unmöglich. Also ist $1, 2, \ldots, u-1$ eine Maximalsequenz für p. Daraus folgt wieder nach (10) und (11) $v \neq u$, d. h. $v \geqq u+2$.

Jetzt beweisen wir, daß $u \geqq 5$. Sonst wäre nämlich $u = 3$, und dann ist

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	1	1	−1	1		−1		1	1	
q	1	1	1	1		1		1	1	

Nach **j** muß jetzt $\varepsilon < 2$ sein. Wegen $3\varepsilon < 6$ folgt aus **b** $\left(\frac{5}{q}\right) = -1$. Ebenfalls aus **b** folgt $3\varepsilon > 4$, d. h. $6\varepsilon > 8$, dann wieder $6\varepsilon > 9$, d. h. $\varepsilon > \frac{3}{2}$. Es kann nicht $\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{7}{p}\right) = 1$ sein, denn dann wäre 7, 8, 9, 10 eine viergliedrige Sequenz für p, was doch wegen **e** und $\left(\frac{3}{pq}\right) = -1$ unmöglich ist. Auch kann nicht $\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{7}{p}\right) = -1$ sein, denn dann würde **g** wegen $3\varepsilon < 9 < 7\varepsilon$ entweder für $x = 3$ oder für $x = 5$ (je nachdem nämlich $9 < 5\varepsilon$ oder $5\varepsilon < 9$ ist) zu einem Widerspruch führen. Somit gilt $\left(\frac{5}{p}\right) = -\left(\frac{7}{p}\right)$. Nur die folgenden zwei Fälle sind also möglich:

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	1	1	−1	1	1	−1	−1	1	1	1						
	1	1	−1	1	−1	−1	1	1	1	−1						
q		1	1	1	1	−1	1		1	1	−1		1			−1,

wobei für p die obere oder die untere Zeile gilt. Im ersten Fall folgt aus **a**, daß wegen $10\varepsilon > 15$ auch $8\varepsilon > 15$, d. h. $\varepsilon > \frac{15}{8}$ gilt. Dann ist $6\varepsilon < 12 < 7\varepsilon$ ein Widerspruch mit **a**. Im zweiten Fall folgt ähnlich, daß wegen $6\varepsilon > 9$ auch $5\varepsilon > 9$, d. h. $\varepsilon > \frac{9}{5}$ gilt. Dann ist $7\varepsilon < 15 < 9\varepsilon$ wieder ein Widerspruch mit **a**. Damit haben wir $u \geqq 5$ bewiesen.

Nunmehr ist die Lage die folgende:

	1	2	…	$u-1$	u	$u+1$	$u+2$	$u+3$	$u+4$				
p	1	1		1	−1	1		1					
	1	2	………			$v-1$	v	$v+1$	$v+2$	$v+3$	$v+4$	$v+5$	
q	1	1				1	−1	1		1		1.	

Da $u \geqq 5$, $v \geqq 7$ ist und u, v ungerade sind, sind alle Angaben richtig. Unter den Zahlen $u+2$, $u+4$ ist die eine durch 3 teilbar, weshalb die obere Tabelle noch eine 1 enthalten muß. Ähnliches gilt auch über die untere Tabelle. Offenbar folgt aus **a** und **b** $(u-1)\varepsilon < v$, $u\varepsilon > v-1$, d. h. $\frac{v-1}{u} < \varepsilon < \frac{v}{u-1}$. Es ist klar, daß $\frac{p}{2} > u-1$ sein muß. Dann ist $p \geqq 2u-1$ und wegen $2 \nmid u$ sogar $p \geqq 2u+1$. Jedenfalls ist also $p \geqq u+6$. Ähnlich ist $q \geqq 2v+1 \geqq v+8$.

Wir unterscheiden die folgenden zwei Fälle 1), 2):

1) $\left(\frac{u+2}{p}\right) = 1$. Wir wenden **d** auf $l = 3$, $a = u$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ an. Nach der letzten Gleichung in (10) ergibt sich, daß es in den Intervallen $\varepsilon, (u+1)\varepsilon$; $2\varepsilon, (u+2)\varepsilon$; $3\varepsilon, (u+3)\varepsilon$ je ein y_1, y_2, y_3 gibt, so daß diese (sogar mod u) verschieden sind und $\left(\frac{y_i}{q}\right) = -1$ $(i = 1, 2, 3)$ gilt. Nach obigem ist das größte unter ihnen, das ich mit y bezeichne, $\geqq v+6$. Dann ist $(u+1)\varepsilon = (u-1)\varepsilon + 2\varepsilon < v+6 \leqq y < (u+3)\varepsilon$. Daraus folgt nach dem auf die Sequenz $u+1, u+2, u+3$ angewendeten **a**, daß $\left(\frac{y}{q}\right) = 1$ ist, was ein Widerspruch ist.

2) $\left(\frac{u+2}{p}\right) = -1$. Zuerst betrachten wir den Fall $\varepsilon < 2$. Wäre dann $\left(\frac{v+2}{q}\right) = 1$, so würde aus dem auf $x = u+2$, $y = v+1$ angewendeten **b** wegen

$$(u+2)\varepsilon = u\varepsilon + 2\varepsilon > (v-1) + 2 = v+1$$

folgen, daß auch $(u+2)\varepsilon > v+2$ gelten muß; dann ist aber $u\varepsilon = (u-1)\varepsilon + \varepsilon < v+2 < (u+2)\varepsilon$, und daraus folgt wegen $u \equiv v+2 \pmod 2$ und **g**, daß trotzdem $\left(\frac{v+2}{q}\right) = -1$ ist. Hieraus folgern wir, daß $u \geqq 7$ sein muß. Im anderen Fall ist nämlich $u = 5$, $v < u\varepsilon + 1 < 11$. Da v eine Primzahl ist, kann v nur 7 sein, aber auch das ist wegen $\left(\frac{v+2}{q}\right) = -1$ unmöglich. Daher ist wirklich $u \geqq 7$. Hieraus folgt $\left(\frac{u+5}{p}\right) = 1$. Jetzt wenden wir **d** auf $l = 4$, $a = u$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$ an. Es ergibt sich, daß in den Intervallen $\varepsilon, (u+1)\varepsilon$; $3\varepsilon, (u+3)\varepsilon$; $4\varepsilon, (u+4)\varepsilon$; $5\varepsilon, (u+5)\varepsilon$ je ein y_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ existiert, die alle verschieden sind, und für die $\left(\frac{y_i}{q}\right) = -1$ gilt. Ist wieder y das größte unter ihnen, so muß wegen $\left(\frac{v+4}{q}\right) = \left(\frac{v+7}{q}\right) = 1$ (jetzt ist nämlich $v \geqq u+2 \geqq 9$) $y \geqq v+8$ sein. Es folgt $(u+3)\varepsilon = (u-1)\varepsilon + 4\varepsilon < v+8 \leqq y < (u+5)\varepsilon$. Dabei ist $u+3, u+4, u+5$ eine positive Sequenz für p. Beides zusammen ergibt den Widerspruch $\left(\frac{y}{q}\right) = 1$.

Es ist noch der Fall $\varepsilon > 2$ übrig. Hiervon untersuchen wir die Möglichkeit $u = 5$ später, nehmen also vorläufig $u \geqq 7$ an. Dann ist $\left(\frac{u+4}{p}\right) = \left(\frac{u+5}{p}\right) = 1$. Weiter muß noch $\left(\frac{u+6}{p}\right) = 1$ sein, denn sonst wäre $u+3$, $u+4$, $u+5$ wegen $p \geqq 2u+1 \geqq u+8$ eine Maximalsequenz für p, was doch nach **i** unmöglich ist. Jetzt können wir also **d** auf $l = 5$, $a = u$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$ anwenden und gewinnen in den Intervallen $\varepsilon, (u+1)\varepsilon$; $3\varepsilon, (u+3)\varepsilon$; $4\varepsilon, (u+4)\varepsilon$; $5\varepsilon, (u+5)\varepsilon$; $6\varepsilon, (u+6)\varepsilon$ je ein y_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, die alle verschieden sind und der Bedingung $\left(\frac{y_i}{q}\right) = -1$ genügen. Andererseits ist jetzt $u = 7$ wegen $\left(\frac{u+2}{p}\right) = -1$ unmöglich, also ist $u \geqq 11$, $v \geqq 13$, woraus $\left(\frac{v+7}{q}\right) = \left(\frac{v+9}{q}\right) = \left(\frac{v+11}{q}\right) = 1$ folgt. Weiter kann es unter den Zahlen $v+2$, $v+4$, $v+6$, $v+8$, $v+10$ offenbar höchstens drei quadratische Nichtreste für q geben; somit ist das größte unter den y_i, das wir wieder mit y bezeichnen, $\geqq v+12$. Nun ist $(u+3)\varepsilon = (u-1)\varepsilon + 4\varepsilon < v+12 \leqq y < (u+6)\varepsilon$, und

$u+3, u+4, u+5, u+6$ ist eine positive Sequenz für p, so daß nach a auch jetzt der Widerspruch $\left(\frac{y}{q}\right)=1$ entsteht.

Endlich ist noch $u=5$ zu betrachten. Dann haben wir

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	1	1	1	1	−1	1	−1	1	1	−1					
q	1	1	1	1	1	1			1						1

Wenden wir g auf $x=5$ an, so folgt, daß alle ungeraden Zahlen im Intervall $5\varepsilon, 7\varepsilon$ quadratische Nichtreste für p sind. Und zwar muß es wenigstens zwei solche geben, da wegen $\varepsilon>2$ die Länge dieses Intervalls $\geqq 4$ ist. Andererseits darf dieses Intervall wegen $\left(\frac{15}{q}\right)=1$ die Zahl 15 nicht enthalten, und somit muß wegen $\varepsilon<3$ auch $7\varepsilon<15$ gelten. Jetzt wenden wir noch e auf $x=7, a=3$ an, wobei wir darauf Rücksicht nehmen, daß $\left(\frac{3}{pq}\right)=1$, somit auch $p\equiv q \pmod 3$ gilt. Es folgt, daß alle ganzen Zahlen im Intervall $7\varepsilon, 10\varepsilon$, die $\equiv 7 \pmod 3$, d. h. $\equiv 1 \pmod 3$ sind, quadratische Nichtreste mod q sein müssen. Es ist aber $7\varepsilon<16<10\varepsilon$. Damit haben wir unsere Behauptung bewiesen.

Bemerkung. Nach Hasse[7]) gibt es für $p\equiv 3 \pmod 4$, $p\geqq 19$ viergliedrige Sequenzen. Auch beweist man aus seinem Resultat leicht, daß es für $p\equiv 3 \pmod 4$, $p\geqq 31$ dreigliedrige Maximalsequenzen gibt. Mit dieser Hilfe lassen sich aus e und i schärfere Folgerungen ziehen, und dadurch entsteht die in der Einleitung erwähnte Verkürzung des Beweises.

Eingegangen 25. August 1940.